

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND V, HEFT 3

MIT 19 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 29. JUNI 1951)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG

1951



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

**Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5**

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

### Band V, Heft 3

### Inhaltsverzeichnis

#### Originalarbeiten.

	Seite
<b>J. Dörr</b> , Bestimmung der Dreieigenfrequenzen einer gewissen Gruppe von Wellen mit singulären Rändern. (Mit 1 Textabbildung.)	217
<b>W. Schultz-Piszachich</b> , Beitrag zur formelmäßigen Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung gewölbter Tragflügelprofile in Unter- und Überschallströmung	226
<b>K. Federhofer</b> , Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes. (Mit 4 Textabbildungen.)	240
<b>R. Bereis</b> , Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. (Mit 8 Textabbildungen.)	246
<b>W. Jurecka</b> , Die Stabilität der Schwingungen in zwei hintereinander liegenden Wasserschlossern. (Mit 2 Textabbildungen.)	267
<b>K. M. Koch</b> , Die Abhängigkeit des Curie-Punktes der Ferromagnetika vom Magnetfeld. (Mit 4 Textabbildungen.)	278

#### Zuschriften.

<b>K. Oswatitsch und F. Magyar</b> , Zur Ableitung des Croccoschen Wirbelsatzes	284
Alfons Leon † (F. Magyar)	285

#### Buchbesprechungen

Glocker, R., Röntgen- und Radiumphysik für Mediziner (F. Regler). — Hopkins, H. H., Wave Theory of Aberrations (W. Glaser). — Oldenbourg, R. C., und H. Sartorius, Dynamik selbsttätiger Regelungen, 2. Aufl. 1. Bd.: Allgemeine und mathematische Grundlagen. — Stetige und unstetige Regelungen. — Nichtlinearitäten (F. Magyar). — Schmeidler, W., Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik (F. Magyar).



# Bestimmung der Dreheigenfrequenzen einer gewissen Gruppe von Wellen mit singulären Rändern.

Von J. Dörr, Darmstadt.

Mit 1 Textabbildung.

**Zusammenfassung.** Es wird eine Gruppe von Stäben mit gerader Mittellinie und variablem Querschnitt angegeben, für die sich bei verschiedenen Randbedingungen sämtliche Dreheigenfrequenzen durch einfache Formeln exakt ausdrücken lassen, ohne daß es nötig ist, die Eigenschwingungsformen zu kennen. Zu dieser Gruppe gehören insbesondere solche Stäbe, die an den Rändern singulär sind, das heißt, deren Steifigkeits- und Massenbelegung bei Annäherung an die Ränder gegen Null oder gegen Unendlich gehen.

**Résumé.** On indique un groupe de poutres à axe rectiligne et section variable, pour lesquelles on peut exprimer exactement toutes les fréquences propres de torsion par des formules simples correspondant à diverses conditions aux limites, sans qu'il soit nécessaire de connaître leurs modes de vibrations propres. Font partie de ce groupe notamment des poutres à extrémités singulières, c'est-à-dire, des poutres dont les répartitions de rigidité et de masse tendent vers zéro ou vers l'infini au voisinage des extrémités.

**Summary.** The report deals with a group of beams with straight axes and variable cross sections, for which all torsional frequencies for different boundary conditions may be calculated exactly by simple formulas. It is not necessary to know the modes of vibration. In particular, this group comprises beams, which have singularities at their boundaries, such that the stiffness, and mass distributions vanish or increase without limit when approaching the boundary.

## 1. Aufgabenstellung.

Wir wollen nur Wellen betrachten mit gerader Schwerlinie und über die ganze Länge ähnlichem Querschnitt. Die Eigendreherschwingungen solcher Wellen werden beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left[ g(x) \frac{dy}{dx} \right] + \omega^2 k^2 g(x) y = 0. \quad (1)$$

Dabei bedeutet:

$y$  die Amplitude der Drehschwingung,

$x$  die Längenkoordinate,

$g(x)$  die Drehsteifigkeitsbelegung,

$k^2 g(x)$  die Trägheitsmomentenbelegung,

$\omega$  die Kreisfrequenz.

Die Wellenschwerlinie bedecke das Intervall  $0 \leq x \leq \pi$ , was sich durch eine geeignete lineare Transformation der Längenkoordinate immer erreichen läßt, sofern man Wellen endlicher Länge voraussetzt. An den Rändern  $x = 0$  und  $x = \pi$  seien für die Lösung von (1) gewisse Randbedingungen vorgeschrieben. Ist die Welle am Rande  $x = 0$  bzw.  $x = \pi$  fest eingespannt, so muß sein

$$y(0) = 0 \text{ bzw. } y(\pi) = 0. \quad (2a)$$



Eine Einspannung an den Rändern läßt sich technisch nur verwirklichen, wenn die Drehsteifigkeit der Welle an den Rändern von „Null“ verschieden ist. Die Randbedingungen (2a) haben also nur unter folgenden Voraussetzungen einen Sinn:

$$g(0) \neq 0 \text{ bzw. } g(\pi) \neq 0. \quad (2b)$$

Ist die Welle an einem Rande frei, so muß an diesem Rande das Moment der elastischen Kräfte „Null“ sein. Dieses Moment wird durch

$$g(x) \frac{dy}{dx}$$

beschrieben.

Ist der Rand  $x = 0$  frei, so folgt also aus (1)

$$y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\omega^2 k^2}{g(x)} \int_0^x g(x) y(x) dx. \quad (3a)$$

Ist der Rand  $x = \pi$  frei, so folgt:

$$y'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\omega^2 k^2}{g(x)} \int_\pi^x g(x) y(x) dx. \quad (3b)$$

Wir werden später genauer sehen, unter welchen Voraussetzungen den Randbedingungen (3) ein Sinn zukommt. Aus physikalischen Überlegungen können wir aber schon jetzt einige Schlüsse ziehen. Wenn  $g(x)$  bei Annäherung an einen Rand so stark nach Unendlich geht, daß das Integral über  $g(x)$  für ein beliebig kleines auf einer Seite von diesem Randpunkt begrenztes Intervall unendlich ist, so haben wir es physikalisch gesehen mit einer Welle mit unendlich großer Endscheibe (Flansch) zu tun. Am Orte eines unendlich großen Flansches muß aber die Amplitude der Drehschwingung immer Null sein, ganz gleich, ob man sich den Flansch als frei oder eingespannt denkt. In diesem Fall haben also nur die Randbedingungen (2) einen Sinn.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Eigenwerte  $\omega_n^2$  zu ermitteln, welche Lösungen der Differentialgleichung (1) bei vorgegebenen Randbedingungen (2) oder (3) erlauben. Wir wollen jedoch diese Aufgabe nicht in voller Allgemeingültigkeit behandeln, sondern wir wollen Typen von Differentialgleichungen der Bauart (1) suchen, deren Eigenwerte sich mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln exakt bestimmen lassen.

## 2. Allgemeine Vorbetrachtung.

Bei Anwendung funktionentheoretischer Methoden spielt die Untersuchung der Lösung in der Umgebung der singulären Stellen der Differentialgleichung und in der Umgebung des unendlich fernen Punktes eine entscheidende Rolle. Die Untersuchung der Lösung in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle führt aber auf schwierigste Probleme, die zum Teil noch prinzipiell ungelöst sind (z. B. Fragen der Eindeutigkeit oder des Verzweigungsgrades). Zur Vermeidung dieser Schwierigkeiten müssen wir uns auf Differentialgleichungen beschränken, die in der gesamten komplexen Ebene nur außerwesentlich singuläre Stellen besitzen. Das heißt, wir müssen uns auf Fuchssche Differentialgleichungen beschränken. Unsere Differentialgleichung (1) ist von vornherein nicht vom Fuchsschen Typ. Der unendlich ferne Punkt ist z. B. eine wesentlich singuläre Stelle. Die einfachste Transformation, welche (1) unter gewissen Voraussetzungen in den Fuchsschen Typ überführt, ist:

$$\zeta = \cos x. \quad (4a)$$

Mit den Bezeichnungen

$$g[x(\zeta)] \equiv G(\zeta), \quad y[x(\zeta)] \equiv Y(\zeta) \quad (4b)$$



erhält man mit (4a) aus (1):

$$\frac{d^2 Y}{d\zeta^2} + \left[ \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{\frac{dG(\zeta)}{d\zeta}}{G(\zeta)} \right] \frac{dY}{d\zeta} - \frac{\omega^2 k^2}{\zeta^2 - 1} Y = 0. \quad (4c)$$

Diese Differentialgleichung ist in der Tat vom Fuchsschen Typ, wenn  $G'/G$  nur Pole von höchstens erster Ordnung besitzt und für  $\zeta \rightarrow \infty$  mindestens wie  $1/\zeta$  gegen Null strebt.

Durch die Transformation (4a) wird das Geradenstück  $0 \leq x \leq \pi$  eindeutig auf das Geradenstück  $+1 \geq \zeta \geq -1$  abgebildet. Die Randpunkte  $x = 0$  und  $x = \pi$  gehen dabei über in die Randpunkte  $\zeta = +1$  und  $\zeta = -1$ . Für (4c) müssen die Randbedingungen (2) und (3) wie folgt formuliert werden:

Ränder eingespannt:

$$Y(+1) = 0 \text{ bzw. } Y(-1) = 0. \quad (5a)$$

Das ist nur möglich unter der Voraussetzung:

$$G(+1) \neq 0 \text{ bzw. } G(-1) \neq 0. \quad (5b)$$

Ränder frei:

$$\left. \begin{aligned} Y'(+1) &= \lim_{\zeta \rightarrow +1} \frac{-\omega^2 k^2}{G(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}} \int_1^{\zeta} \frac{G(\zeta) Y(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta, \\ Y'(-1) &= \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{-\omega^2 k^2}{G(\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}} \int_{-1}^{\zeta} \frac{G(\zeta) Y(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (5c)$$

Wir erwähnten schon, daß wir später gewisse Eigenschaften der Lösung der Differentialgleichung (4c) in den singulären Punkten kennen müssen. In den singulären Randpunkten  $\zeta = \pm 1$  läßt sich bereits durch die Randbedingungen (5) das Verhalten der Lösung von (4c) in dem benötigten Maße festlegen. Die Differentialgleichung (4c) ist aber außer in den Randpunkten noch in den Punkten  $\zeta_n$  singulär, die durch  $G/G' = 0$  definiert sind. Um das Verhalten der Lösung in einem singulären Punkte, der nicht mit einem der Randpunkte zusammenfällt, zu ermitteln, müßte man bereits die Lösung des Randwertproblems in allen Einzelheiten kennen. Wir wollen aber die Eigenwerte der Differentialgleichung bestimmen, ohne die Eigenfunktionen selbst berechnen zu müssen. Das ist möglich, wenn  $G'/G$  höchstens zwei Pole besitzt, die mit den Randpunkten zusammenfallen. Außerdem muß aber  $G'/G$  für  $\zeta \rightarrow \infty$  mindestens wie  $1/\zeta$  gegen Null gehen. Der allgemeinste rationale Ausdruck, der diese Forderungen erfüllt, ist:

$$\frac{G'}{G} = \frac{a + b\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)} \equiv \frac{p_1}{\zeta + 1} + \frac{p_2}{\zeta - 1}. \quad (6a)$$

Die gesuchte Differentialgleichung hat also die Form:

$$Y'' + \left( \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{p_1}{\zeta + 1} + \frac{p_2}{\zeta - 1} \right) Y' - \frac{\omega^2 k^2}{\zeta^2 - 1} Y = 0. \quad (6b)$$

Um die physikalische Bedeutung dieser Differentialgleichung zu verstehen, müssen wir  $G(\zeta)$  bzw.  $g(x)$  berechnen. Aus (6a) findet man

$$G(\zeta) = k(1 + \zeta)^{p_1}(1 - \zeta)^{p_2}, \quad (7a)$$

bzw.

$$g(x) = K \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{2p_1} \left( \sin \frac{x}{2} \right)^{2p_2}. \quad (7b)$$



Nehmen wir die Wellen als rotationssymmetrische volle Körper an, so ist der äußere Durchmesser  $D(x)$  der vierten Wurzel aus  $g(x)$  proportional.

$$D(x) = C \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{\frac{p_1}{2}} \left( \sin \frac{x}{2} \right)^{\frac{p_2}{2}}. \quad (7c)$$

In den Abbildungen (1a) bis (1c) sind für einige Werte von  $p_1$  und  $p_2$  die Formen solcher rotationssymmetrischen vollen Wellen wiedergegeben.

Wir sehen, daß Konstruktionselemente der in den Abbildungen (1) dargestellten Art bei Kreiseln und Zentrifugen Verwendung finden. Da man heute solche Geräte für Drehzahlen bis zu  $10^5$  pro Minute baut, können dabei die Probleme der Drehresonanzschwingungen eine bedeutende Rolle spielen. Die durch die Differentialgleichung (6b) beschriebenen Drehschwingungen sind also von erheblicher praktischer Bedeutung. Bei Zentrifugen treten auch hohle rotationssymmetrische Körper auf. Wenn sich die Drehsteifigkeit dieser Hohlkörper durch den Ausdruck (7b) darstellen läßt, so werden die Drehschwingungen ebenfalls durch die Differentialgleichung (6b)

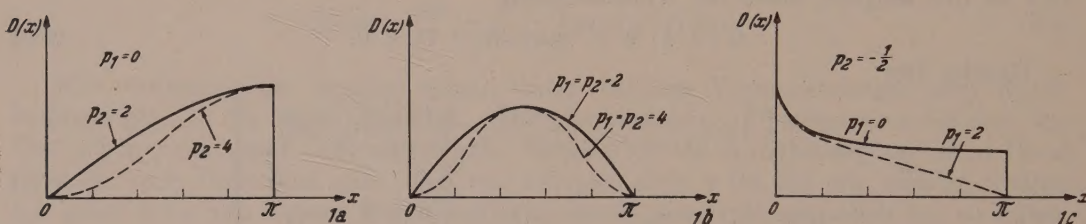


Abb. 1a, 1b, 1c. Wellendurchmesser  $D(x)$  für verschiedene Werte von  $p_1$  und  $p_2$ .

beschrieben. Zwischen dem äußeren Durchmesser der Welle und der Drehsteifigkeit besteht dann aber im allgemeinen nicht mehr der einfache Zusammenhang, wie er durch (7b) und (7c) ausgedrückt wird.

### 3. Bestimmung der Eigenwerte.

Die Differentialgleichung (6b) ist ein Sonderfall der Riemannschen. Wir wollen sie deshalb mit den Riemannschen Bezeichnungen darstellen. Man findet:

$$Y'' + \left( \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{\zeta + 1} + \frac{1 - \beta' - \beta''}{\zeta - 1} \right) Y' + \frac{\gamma' \gamma''}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)} Y = 0 \quad (8a)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{2} - p_1; & \alpha'' &= 0; & \beta' &= \frac{1}{2} - p_2; & \beta'' &= 0; \\ \gamma' &= \frac{p_1 + p_2}{2} + \sqrt{\left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right)^2 + \omega^2 k^2}; & \gamma'' &= \frac{p_1 + p_2}{2} - \sqrt{\left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right)^2 + \omega^2 k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Der besondere Vorteil dieser Darstellung besteht darin, daß die Größen  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma'$ ,  $\gamma''$  die Exponenten darstellen, die auftreten, wenn man Entwicklungen für die Lösungen an den singulären Stellen  $\zeta = \pm 1$  und  $1/\zeta = 0$  angibt. Man kann in der Tat leicht zeigen, daß es an den drei singulären Stellen je zwei partikuläre Lösungen von (8a) gibt in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} Y_{-11} &= (\zeta + 1)^{\alpha'} P_{-11}(\zeta + 1); & Y_{-12} &= P_{-12}(\zeta + 1); \\ Y_{+11} &= (\zeta - 1)^{\beta'} P_{+11}(\zeta - 1); & Y_{+12} &= P_{+12}(\zeta - 1); \\ Y_{\infty 1} &= \frac{1}{\zeta^{\gamma'}} P_{\infty 1}\left(\frac{1}{\zeta}\right); & Y_{\infty 2} &= \frac{1}{\zeta^{\gamma''}} P_{\infty 2}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Dabei sind die Funktionen  $P$  jeweils in einem gewissen Bereich, der den betreffenden singulären Punkt im Innern enthält, regulär und hier durch Potenzreihen darstellbar.



Man sieht leicht, daß sich die Randbedingungen (5a) nur erfüllen lassen, wenn man  $Y_{-11}$  und  $Y_{+11}$  als Lösungen für die Randpunkte und ihre Umgebung wählt, unter der Voraussetzung

$$\alpha' \equiv \frac{1}{2} - p_1 > 0 \quad \text{und} \quad \beta' \equiv \frac{1}{2} - p_2 > 0.$$

Diese Voraussetzung ist weiterreichend als die aus physikalischen Überlegungen gefolgerte Voraussetzung (5b). In der Tat, (5b) entspricht der Forderung  $p_1 \leq 0$  und  $p_2 \leq 0$ . Mathematisch gesehen ist also die Bedingung (5a) auch noch erfüllbar, wenn  $0 < p_1 < \frac{1}{2}$  bzw.  $0 < p_2 < \frac{1}{2}$  ist. Jedoch läßt sich zeigen, daß dann in den Rändern der Welle unendlich große Deformationen auftreten müßten. Das ist aber technisch gesehen unmöglich. Die Bedingung der festen Einspannung an den Rändern

$$Y(-1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad Y(+1) = 0 \quad (10a)$$

ist also technisch nur möglich unter der Voraussetzung

$$p_1 \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad p_2 \leq 0. \quad (10b)$$

Eine leichte Rechnung zeigt weiterhin, daß die Bedingung des freien Randes, formuliert durch die Forderung (5b), sich nur verwirklichen läßt, wenn man  $Y_{-12}$  und  $Y_{+12}$  als Lösungen für die Randpunkte und ihre Umgebung wählt und wenn die Voraussetzung erfüllt ist:

$$p_1 > -\frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad p_2 > -\frac{1}{2}. \quad (11)$$

Diese Bedingung entspricht der in Abschnitt (2) aus physikalischen Betrachtungen gefolgerten Bedingung. Der Fall  $p_1 \leq -\frac{1}{2}$  bzw.  $p_2 \leq -\frac{1}{2}$  kennzeichnet in der Tat eine Welle mit unendlich großem Flansch. An der Stelle des unendlich großen Flansches muß aber die Drehamplitude immer „Null“ sein. Dann hat also nur die Randbedingung (10a) einen physikalischen Sinn, ganz gleich, ob man sich den unendlich großen Flansch als eingespannt oder frei denkt.

Wir wollen jetzt unter Beachtung der Einschränkungen (10b) und (11) die Eigenwerte der Differentialgleichung (6b) bzw. (8a) für verschiedene Randbedingungen ermitteln.

A. Die Welle ist eingespannt an beiden Rändern. Also muß sein:

$$Y(-1) = 0 \quad \text{und} \quad Y(+1) = 0, \\ p_1 \leq 0 \quad \text{und} \quad p_2 \leq 0.$$

Wir können sofort partikuläre Lösungen angeben, die entweder nur an der Stelle  $(-1)$  oder nur an der Stelle  $(+1)$  die Bedingung der festen Einspannung erfüllen, indem wir die partikulären Lösungen wählen, die durch die Exponenten  $\alpha' = \frac{1}{2} - p_1$  und  $\beta' = \frac{1}{2} - p_2$  gekennzeichnet sind. Sie lauten:

$$Y_{-1} = (\zeta + 1)^{\alpha'} P_{-11}(\zeta + 1); \quad Y_{+1} = (\zeta - 1)^{\beta'} P_{+11}(\zeta - 1). \quad (12a)$$

Die Funktionen  $P_{-11}$  und  $P_{+11}$  hängen dabei noch von dem Parameter  $\omega^2$  ab. Diesen Parameter müssen wir jetzt so bestimmen, daß die beiden Lösungen  $Y_{-1}$  und  $Y_{+1}$  identisch werden. In diesem Falle muß man aber die Lösung auch in folgender Form darstellen können:

$$Y = (\zeta + 1)^{\alpha'} (\zeta - 1)^{\beta'} P(\zeta). \quad (12b)$$

Dabei muß man die von  $\zeta = \pm 1$  ausgehenden Verzweigungsschnitte so ins Unendliche führen, daß sie das Stück der reellen Achse zwischen den Punkten  $\zeta = \pm 1$  nicht schneiden. Dieses Stück der reellen Achse ist nämlich der eigentliche Definitions-



bereich der Differentialgleichung (8a), der natürlich nicht durch Verzweigungsschnitte zertrennt werden darf. Die Funktion  $P(\zeta)$  muß mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes in der gesamten  $\zeta$ -Ebene regulär analytisch sein, muß sich also in eine Potenzreihe entwickeln lassen, die in der gesamten  $\zeta$ -Ebene konvergiert. Es könnte nämlich, wenn man vom unendlich fernen Punkt absieht,  $P(\zeta)$  nur an den Stellen  $\zeta = \pm 1$  singulär sein, da die Differentialgleichung im Endlichen nur  $\zeta = \pm 1$  als singuläre Stellen hat. Wäre aber  $P(\zeta)$  an den Stellen  $\zeta = \pm 1$  singulär, so würde (12b) nicht die geforderten Randbedingungen erfüllen.

Setzt man (12b) in die Differentialgleichung (8a) ein, so erhält man eine neue Differentialgleichung für  $P(\zeta)$ . Wählt man für  $P(\zeta)$  einen Potenzreihenansatz, dann kann man in der Tat die Koeffizienten der Reihe so bestimmen, daß die Reihe in der ganzen  $\zeta$ -Ebene konvergiert, indem man nämlich den noch offenen Parameter  $\omega^2$  so festlegt, daß die Reihe bei einem bestimmten Glied abbricht. Diese  $\omega_n^2$  sind die Eigenwerte der Randwertaufgabe.

Es gibt indessen ein noch bequemerer Verfahren zur Ermittlung der Eigenwerte. Nach (9) läßt sich die Lösung im Unendlichen immer in folgender Weise darstellen:

$$Y_\infty = A' \zeta^{-\gamma'} \left( a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right) + A'' \zeta^{-\gamma''} \left( b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \dots \right).$$

Wir setzen jetzt  $A' = 0$  und bestimmen  $\omega^2$  so, daß

$$-\gamma'' = n + \alpha' + \beta' \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

ist. Setzt man hier die Ausdrücke (8b) ein, so erhält man

$$\sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 + \omega^2 k^2} - \frac{p_1 + p_2}{2} = n + 1 - p_1 - p_2. \quad (13a)$$

Daraus folgt:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left[ (n+1)^2 - (n+1)(p_1 + p_2) \right]. \quad (13b)$$

Unter der Voraussetzung (13b) gibt es also für die Umgebung des unendlich fernen Punktes eine partikuläre Lösung von der Form

$$Y_\infty = A'' \zeta^{n+\alpha'+\beta'} \left( b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots \right). \quad (13c)$$

Eine solche asymptotische Entwicklung ist aber nur möglich, wenn die Potenzreihe in (12b) abbricht. Es muß also sein:

$$P(\zeta) \equiv P_n(\zeta) = a_0 \zeta^n + a_1 \zeta^{n-1} + \dots + a_n.$$

Setzt man das in (12b) ein, so erhält man in der Tat als Entwicklung für den unendlich fernen Punkt eine Reihe nach fallenden Potenzen von  $\zeta$ , die mit der Potenz  $(n + \alpha' + \beta')$  beginnt. Der Ausdruck (13b) ist die Bedingung dafür, daß  $P(\zeta)$  durch eine abbrechende Reihe dargestellt werden kann, also in der gesamten  $\zeta$ -Ebene regulär analytisch ist. Dann ist aber (12b) die Lösung der gestellten Randwertaufgabe und die durch (13b) angegebenen  $\omega_n^2$  sind die Eigenwerte.

B. Die Welle ist frei an beiden Rändern. Es müssen also die Bedingungen (5c) erfüllt werden.

Die Bedingungen (5c) sind erfüllt, wenn man für die Stellen  $\zeta = \pm 1$  die partikulären Lösungen (9) wählt, die durch die Exponenten  $\alpha'' = 0$  und  $\beta'' = 0$  gekennzeichnet sind unter der Voraussetzung

$$p_1 > -\frac{1}{2}; \quad p_2 > -\frac{1}{2}.$$

Die Gesamtlösung darf also an den Stellen  $\zeta = \pm 1$  nicht singulär sein, muß also



in der gesamten  $\zeta$ -Ebene regulär analytisch sein und sich als eine in der gesamten  $\zeta$ -Ebene konvergente Potenzreihe darstellen lassen.

$$Y = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots \quad (14)$$

In der Umgebung des unendlich fernen Punktes gibt es nach (9) eine partikuläre Lösung von der Form:

$$Y_\infty = \zeta^{-\gamma''} \left( c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \right).$$

Man kann  $\omega^2$  so festlegen, daß

$$-\gamma'' = n \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

ist. Das heißt:

$$-\frac{p_1 + p_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 + \omega^2 k^2} = n.$$

Daraus folgt

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left[ n^2 + n(p_1 + p_2) \right]. \quad (15)$$

Unter der Voraussetzung (15) gibt es also für das Unendliche eine Lösung von der Form

$$Y_\infty = \zeta^n \left( c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \right).$$

Das ist nur möglich, wenn die Reihe (14) abbricht. Dann ist aber (14) in der gesamten  $\zeta$ -Ebene regulär analytisch und stellt die Lösung der gestellten Randwertaufgabe dar. Der Ausdruck (15) gibt die Eigenwerte des Randwertproblems an.

C. Die Welle ist bei  $\zeta = -1$  ( $x = \pi$ ) eingespannt und bei  $\zeta = +1$  ( $x = 0$ ) frei.

Unter der Voraussetzung

$$p_1 \leq 0; p_2 > -\frac{1}{2}$$

werden diese Randbedingungen erfüllt, wenn man für die Punkte  $\zeta = \pm 1$  die partikulären Lösungen (9) wählt, die durch die Exponenten

$$\alpha' = \frac{1}{2} - p_1 \text{ und } \beta'' = 0$$

gekennzeichnet sind.

Der Exponent der Entwicklung für den unendlich fernen Punkt muß also sein

$$-\gamma'' \equiv -\frac{p_1 + p_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2 + \omega^2 k^2} = n + \frac{1}{2} - p_1.$$

Daraus folgt für die Eigenwerte:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left( n + \frac{1}{2} - p_1 \right) \left( n + \frac{1}{2} + p_2 \right). \quad (16)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Wir erwähnten bereits, daß für  $p_1 \rightarrow -\frac{1}{2}$  und  $p_2 \rightarrow -\frac{1}{2}$  die Bedingung der freien Ränder identisch wird mit der Bedingung der eingespannten Ränder. Wir wollen prüfen, ob für diesen Grenzfall die Eigenwerte (13 b), (15), (16) einander gleich werden.

Man erhält aus (15):

$$\lim_{p_1 = p_2 \rightarrow -\frac{1}{2}} \omega_m^2 = \frac{1}{k^2} (m^2 - m) \text{ mit } m = 0, 1, 2, \dots$$

Setzt man  $m = n + 2$ , so erhält man

$$\lim_{p_1 = p_2 \rightarrow -\frac{1}{2}} \omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left[ (n + 1)^2 + n + 1 \right]. \quad (15')$$

Das ist in der Tat identisch mit dem Ausdruck (13), wenn man dort  $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2}$



setzt und wenn man in (15') von den beiden Eigenwerten „Null“ absieht, denen keine besondere physikalische Bedeutung zukommt. Aus (16) erhält man

$$\lim_{p_2 \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{k^2} \omega_m^2 = \frac{1}{k^2} \left( m + \frac{1}{2} - p_1 \right) m.$$

Mit  $m = n + 1$  wird daraus:

$$\lim_{p_2 \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1}{k^2} \omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left[ (n + 1)^2 + \frac{n + 1}{2} - (n + 1) p_1 \right]. \quad (16')$$

Das ist mit (13 b) identisch, wenn man dort  $p_2 = -\frac{1}{2}$  setzt und wenn man in (16') von dem Eigenwert „Null“ absieht.

Das Auftreten der Eigenwerte „Null“ läßt sich wie folgt erklären. Für  $p_1 = -\frac{1}{2}$  bzw.  $p_2 = -\frac{1}{2}$  besitzt die Endscheibe ein unendlich großes Trägheitsmoment. Dem entspricht bei endlicher Drehgeschwindigkeit eine unendlich große kinetische Energie. Die Torsion der Welle liefert aber nur endliche elastische Rückstellmomente bzw. endliche Verformungsenergie. Eine unendlich große Endscheibe dreht also, sofern sie einmal in Rotation ist, mit konstanter Wirbelgeschwindigkeit weiter, kehrt also nie in die Ausgangslage zurück. Diese Erscheinung wird durch die Eigenwerte „Null“ gekennzeichnet. Natürlich sind diese Eigenwerte „Null“ ohne physikalische Bedeutung.

#### 4. Einige Bestätigungen der Ergebnisse.

Für  $p_1 = p_2 = 0$  ergeben sich aus (13), (15), (16) die Eigenwerte der homogenen Drehwelle mit konstantem Querschnitt.

Für  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  geht (8a) in die Legendresche Differentialgleichung über. Die Bedingung der eingespannten Ränder ist hier physikalisch unsinnig, da die Randquerschnitte „Null“ sind. Die Bedingung der freien Ränder ist aber identisch mit der Forderung, daß die Lösung in den Randpunkten endlich ist. Die Forderung der Endlichkeit in den Randpunkten (den singulären Stellen der Differentialgleichung) führt auf die Bedingung

$$\omega_n^2 k^2 = n(n + 1).$$

Das ist identisch mit (15), wenn man dort  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  setzt.

Für  $p_1 = p_2 = k = 1$  lautet (7b)

$$g(x) = C \sin^2 x$$

und die Differentialgleichung (1) nimmt mit  $x = z + \frac{\pi}{2}$  die Form an:

$$y'' - 2 \operatorname{tg} z y' + \omega^2 y = 0.$$

Hierfür hat L. Collatz<sup>1</sup> die Eigenwerte angegeben für die Randbedingungen:

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Wenn man die Ränder mit den singulären Stellen der Differentialgleichung zusammenfallen läßt, so gehen diese Randbedingungen über in:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } y\left(+\frac{\pi}{2}\right) \text{ endlich.}$$

Die Eigenwerte dieses Falles werden durch Formel (15) angegeben. Man findet mit  $p_1 = p_2 = 1$ :

$$\omega_n^2 = n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

<sup>1</sup> L. Collatz: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. S. 143. AVG-Leipzig 1945.



Ersetzt man hier  $(n + 1)$  durch  $m$ , so erhält man dieselbe Beziehung wie L. Collatz, wenn man in seiner Formel die speziellen Werte einsetzt.

### 5. Zusammenfassung.

Für die Differentialgleichung der Drehschwingungen einer Welle

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{2p_1} \left( \sin \frac{x}{2} \right)^{2p_2} \frac{dy}{dx} \right] + \omega^2 k^2 \left( \cos \frac{x}{2} \right)^{2p_1} \left( \sin \frac{x}{2} \right)^{2p_2} y = 0$$

werden die Eigenwerte exakt bestimmt unter der Voraussetzung, daß die singulären Stellen  $x = 0$  und  $x = \pi$  der Differentialgleichung als Randpunkte gewählt und dort gewisse Randbedingungen vorgeschrieben werden.

1. Die Welle ist an den Randpunkten  $x = 0$  und  $x = \pi$  fest eingespannt. Das ist nur möglich unter der Voraussetzung

$$p_1 \leq 0; p_2 \leq 0.$$

Die Eigenwerte sind dann

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} [(n + 1)^2 - (n + 1)(p_1 + p_2)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Die Welle ist an dem Randpunkt  $x = 0$  frei und an dem Randpunkt  $x = \pi$  fest eingespannt. Dieser Fall unterscheidet sich nur vom Fall (1), wenn

$$p_2 > -\frac{1}{2}$$

ist. Außerdem muß

$$p_1 \leq 0$$

sein, damit eine Einspannung bei  $x = \pi$  technisch möglich ist. Unter diesen Voraussetzungen erhält man als Eigenwerte

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} \left( n + \frac{1}{2} - p_1 \right) \left( n + \frac{1}{2} + p_2 \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

3. Die Welle ist an den Rändern  $x = 0$  und  $x = \pi$  frei. Dieser Fall unterscheidet sich nur dann vom Fall (1), wenn

$$p_1 > -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad p_2 > -\frac{1}{2}$$

sind. Ist nur  $p_2 > -\frac{1}{2}$  aber  $p_1 \leq -\frac{1}{2}$ ; so ist dieser Fall mit Fall (2) identisch. Unter der Voraussetzung  $p_1 > -\frac{1}{2}$  und  $p_2 > -\frac{1}{2}$  erhält man als Eigenwerte

$$\omega_n^2 = \frac{1}{k^2} [n^2 + n(p_1 + p_2)], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Für  $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2}$  werden alle drei Ausdrücke identisch, wenn man von den Eigenwerten „Null“ absieht. Die Formeln der Fälle (2) und (3) führen zu sinnlosen Aussagen, wenn  $p_2 < -\frac{1}{2}$  bzw.  $p_1 < -\frac{1}{2}$  und  $p_2 < -\frac{1}{2}$  ist.

(Eingegangen am 5. August 1949.)



# Beitrag zur formelmäßigen Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung gewölbter Tragflügelprofile in Unter- und Überschallströmung.

Von W. Schultz-Piszachich, Wien.

**Zusammenfassung.** Da die vorliegende Literatur über zweidimensionale Tragflügeltheorie im Rahmen der linearisierten kompressiblen Strömung nur symmetrische Profile behandelt, in der Praxis jedoch der Wölbungseinfluß des Profils von erheblicher aerodynamischer Bedeutung ist, wurde die Geschwindigkeitsverteilung angestellter gewölbter Tragflügelprofile für verschiedene Mach-Zahlen der formelmäßigen Berechnung zugänglich gemacht. Für die Übergeschwindigkeiten werden geschlossene Formeln abgeleitet, in welche die analytische Gleichung von „Skelett“ und „Tropfen“ einzusetzen sind.

**Summary.** Existing literature treats the two-dimensional compressible airfoil-theory only with regard to the thickness of the airfoil. In this report, the influence of both unsymmetrical and symmetrical profiles on the velocity-distribution in a compressible flow is calculated. In first degree approximations, the velocity-distribution of an airfoil of infinite span may be calculated by formulas, if the analytic equation of the general profile, the angle of attack and the Mach-Number have been chosen.

**Résumé.** Les ouvrages écrits jusqu'ici sur la théorie à 2 dimensions de l'aile porteuse dans le cas d'un courant fluide à compressibilité linéaire ne traite que de profils symétriques. Cependant dans la pratique l'incurvation du profil a une influence capitale du point de vue aérodynamique. C'est pourquoi on a déterminé la répartition des vitesses pour des profils antimétriques (asymétriques) inclinés. Pour les survitesses on a dérivé des formules directes dans lesquelles on n'a plus qu'à introduire l'équation analytique du «squelette» et celle du «profil fuselé».

## Einleitung.

Das zum Zwecke der Berechnung der kompressiblen Geschwindigkeitsverteilung umströmter Drehkörper mitgeteilte Deviationsverfahren<sup>1</sup> läßt sich mit gleichem Erfolg auf die Geschwindigkeitsberechnung umströmter Tragflügelprofile anwenden, so daß die gesamte zweidimensionale Theorie der linearisierten wirbelfreien kompressiblen Strömung mit Hilfe dieser Methode im Zusammenhang abgeleitet werden kann, was in dieser Arbeit hinsichtlich der zweidimensionalen Tragflügeltheorie ausgeführt werden soll<sup>2</sup>.

Es wird ein Verfahren entwickelt, welches die Aufstellung aller einschlägigen Formeln zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an beliebigen gewölbten Tragflügelprofilen in der linearisierten kompressiblen Strömung gestattet. Durch einen zweimaligen Potenzreihenansatz, einerseits für kleine  $y$  bezüglich der Umgebung des Profils, andererseits für den kleinen Profilparameter  $\varepsilon$  wird erreicht, daß sich das Störpotential in der Umgebung des Tragflügels oder an seiner Oberfläche vollständig aus zwei Grundfunktionen oder Deviationen  $a$  und  $b$  aufbauen läßt, die durch Iteration in beliebig hoher Näherung erfaßt werden. Die eine Deviation berechnet sich aus der Randbedingung; die zweite läßt sich in korrespondierender Näherung über die Deviationsbedingung ermitteln.

Die Deviationsbedingung leitet sich aus der Potentialgleichung und dem verschiedenartigen Verhalten des Störpotentials im Unendlichen bei Über- und Unterschallströmung ab. Sie stellt eine vom Profil unabhängige Beziehung zwischen den beiden

<sup>1</sup> W. Schultz-Piszachich: Beitrag zur formelmäßigen Berechnung der stationären Geschwindigkeitsverteilung umströmter Drehkörper im Unter- und Überschallbereich. Österr. Ing.-Arch. V, 4 (1951).

<sup>2</sup> Für  $M > 1$  ist die Geschwindigkeitsformel zwar bekannt, aber ihre Herleitung neu. Dabei ließ sich die Methode am einfachsten erläutern und zeigen, daß das Deviationsverfahren vom Singularitätenverfahren völlig unabhängig ist.



Grundfunktionen dar, beschreibt die Strömungsart und entspricht der Lösung der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

Die Geschwindigkeitsverteilung umströmter gewölbter Tragflügelprofile wird nach der Reihe für  $M > 1$ ,  $< 1$ ,  $= 0$  ermittelt. Bei inkompressiblen Strömungen wird die dargestellte Methode als Iterationsverfahren zur Gewinnung höherer Näherungen der Geschwindigkeits- und Singularitätenverteilung benutzt.

## 1. Die Geschwindigkeitsverteilung umströmter Tragflügelprofile im Überschallbereich.

Das Geschwindigkeitspotential der kompressiblen Strömung genügt der linearisierten Differentialgleichung

$$(1 - M^2) \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0, \quad (1)$$

wenn man die Umströmung eines unendlich langen zylindrischen Tragflügels studiert, dessen maximales Dicken- und Wölbungsmaß klein gegenüber der Profiltiefe ist.

Die Profilgleichung sei in der Form

$$y = \bar{y}(x) \text{ oder } y = \varepsilon \eta(x) \quad (2)$$

gegeben, wo  $\varepsilon$  einen dimensionslosen Profilparameter bezeichnen soll. Innerhalb der linearisierten Theorie müssen die betrachteten Profile als schlank ( $\varepsilon \ll 1$ , d. h. kleine Dicke, Wölbung, Vorderkantenwinkel) vorausgesetzt werden, was durchaus den Forderungen des konstruktiven Flugzeugbaues entspricht, also keine praktische Einschränkung bedeutet.

Die übrigen Linearisierungsvoraussetzungen lauten: 1. Ausschluß der Staupunkte, 2. Voraussetzung kleiner Anstellwinkel und 3. Bedingung  $M \neq 1$ . Wegen 1. wird man an Stelle der üblichen Konturen mit runder Profilnase hier Profile mit kleinem Vorderkantenwinkel bei Ausschluß der Vorder- und Hinterkante untersuchen. Bedingung 2. besagt, daß  $\alpha$  von der Größenordnung  $\varepsilon$  sein oder, wenn die Anblasgeschwindigkeit  $W$  die Komponenten  $U$  und  $V$  besitzt, daß  $\frac{V}{U} = \tan \alpha \approx \alpha$ , also  $V \ll U$  gelten soll, wobei auch der von reiner Queranblasung ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) herrührende Geschwindigkeitsanteil für sich untersucht werden kann. Schließlich muß nach 3. die Umgebung der kritischen Mach-Zahl ausgeschlossen werden, da die D.-Gl. (1) für  $M = 1$  nicht erklärt ist. Im inkompressiblen Fall gelten diese Einschränkungen 1. bis 3. natürlich nicht; durch Berücksichtigung der Größen zweiter Ordnung bei der Ableitung der Potentialgleichung könnte man sich von ihnen weitgehend auch bei beliebiger Mach-Zahl befreien.

Das wesentlich verschiedene Verhalten des Störpotentials in Über- und Unterschall läßt sich leicht analytisch erfassen. Gehen wir von der inkompressiblen ebenen Strömung mit der Potentialgleichung

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (3)$$

aus, so steht dort die Regularitätsbedingung — Abklingen der Störung in unendlich großer Querentfernung vom Profil — zur Verfügung, so daß

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu y} (A_{\nu} \cos \nu x + B_{\nu} \sin \nu x) \quad (3)$$

die vollständige Lösung der D.-Gl. (3) ist, welche das richtige Verhalten im Unendlichen zeigt.

Entsprechend ist offenbar

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu \sqrt{1-M^2} y} (A_{\nu} \cos \nu x + B_{\nu} \sin \nu x) \quad (4)$$



im Unterschall die zutreffende Entwicklung des Störpotentials nach den Eigenfunktionen von

$$(1 - M^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (4)$$

welche die Störung langsamer mit  $\sqrt{1 - M^2}$  abklingen und die inkompressible Strömung ( $M = \frac{W}{c} = 0$ ) als Grenzfall mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \infty$  erkennen läßt.

Überträgt man die Lösung für  $M < 1$  formal auf  $M > 1$ , so befriedigt

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{\pm i \nu \sqrt{M^2-1}} (A_{\nu} \cos \nu x + B_{\nu} \sin \nu x)$$

die Differentialgleichung

$$(M^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad (5)$$

und zeigt auch jetzt das richtige Verhalten, nämlich die ungeschwächte Fortpflanzung der Störung ins Unendliche.

Schreibt man die Lösung von (5) in reeller Form mit  $\beta^2 = M^2 - 1 > 0$

$$\varphi_+ = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_{\nu} \cos \nu (x - \beta y) + B_{\nu} \sin \nu (x - \beta y)] \quad (\bar{5})$$

für die Oberseite und

$$\varphi_- = \sum_{\nu=0}^{\infty} [\bar{A}_{\nu} \cos \nu (x + \beta y) + \bar{B}_{\nu} \sin \nu (x + \beta y)] \quad (\bar{\bar{5}})$$

für die Unterseite des Profils, so erkennt man den Zusammenhang mit der allgemeinen Lösung  $\varphi_+ = f(x - \beta y)$  bzw.  $\varphi_- = g(x + \beta y)$ .

Nach diesen Vorbereitungen allgemeiner Natur werde das Deviationsverfahren auf die ebene Überschallströmung angewandt, wobei wir zunächst die Oberseite des Profils betrachten. Faßt man das Störpotential  $\varphi(x, y)$  als erzeugende Funktion auf, so kann man durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes

$$\varphi = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 + d(x)y^3 + \dots \quad (|y| < 1)$$

in die D.-Gl. (5)

$$\beta^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

sämtliche „Koeffizienten“  $c, d, e, f \dots$  durch  $a$  und  $b$  ausdrücken, so daß  $\varphi$  für kleine  $y$  die Darstellung

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta^{2\nu} \left[ a^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!} + b^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu+1}}{(2^{\nu} + 1)!} \right] \quad (6)$$

erhält. Die Potentialgleichung (5) läßt also zwei Funktionen, die Deviationen  $a(x)$  und  $b(x)$ , unbestimmt. Umgekehrt ist  $\varphi$  am Profil und in seiner Umgebung vollständig bestimmt, wenn man die Funktionen  $a$  und  $b$  kennt, da sich das Störpotential systematisch aus diesen beiden Deviationen nach dem einfachen Bildungsgesetz (6) aufbaut.

Aus (5) leitet man sofort über

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0} = a' = \sum \nu [-A_{\nu} \sin \nu x + B_{\nu} \cos \nu x]$$

und

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = b = -\beta \sum \nu [-A_{\nu} \sin \nu x + B_{\nu} \cos \nu x]$$

die Deviationsbedingung

$$a' = -\frac{b}{\beta} \quad (7)$$



ab. Nach der Definition des Machschen Winkels  $\mu$  gemäß  $\frac{c}{W} = \sin \mu$  kann man in (7) den Faktor  $\frac{1}{\beta} = \operatorname{tg} \mu$  schreiben. Da somit ein fester Zusammenhang zwischen den Funktionen  $a$  und  $b$  in der Relation (7) vorliegt, ist das Problem auf die Ermittlung von nur einer der beiden Deviationen reduziert. Denn durch Berücksichtigung von (7)  $b = -\beta a'$  in der Entwicklung (6) gelangt man zu dem vereinfachten Ausdruck

$$\varphi = \sum_{v=0}^{\infty} (-\beta)^v a^{(v)}(x) \frac{y^v}{v!}. \quad (8)$$

Durch Auswertung der Randbedingung

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{y=\varepsilon \eta(x)} = \varepsilon \eta'(x) \left( \frac{w_y}{w_x} \right)_{y=\varepsilon \eta(x)} \quad (9)$$

läßt sich nun die Deviation  $b$  berechnen, so daß  $a$  mittels (7) und  $\varphi$  mittels (8) bekannt sind. Die ungestörte Parallelströmung erfolge unter dem Anstellwinkel  $\alpha$  und besitze das Geschwindigkeitspotential

$$\bar{\Phi} = Ux + Vy = W(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \approx W(x + \alpha y). \quad (10)$$

Die resultierende Geschwindigkeit  $w$  leitet sich dann aus dem Potential

$$\bar{\Phi} = \Phi + \varphi$$

ab und ist neben den Entwicklungen

$$a(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}(x) \varepsilon^{\kappa}, \quad b(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}(x) \varepsilon^{\kappa}$$

in (9) einzuführen, um den größenordnungsmäßigen Vergleich bezüglich  $\varepsilon^{\kappa}$  zu ermöglichen. Man erhält so neben (7)  $a' = -\frac{b}{\beta}$  die Näherungen

$$\begin{aligned} a_0' &= +\frac{V}{\beta}, \quad a_0'' = 0, \\ b_1 &= \eta' \left( U + \frac{V}{\beta} \right) = W \eta' \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right), \\ a_1' &= -\frac{W}{\beta} \eta' \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Im Rahmen der linearisierten Theorie ist  $a(x) = a_0 + a_1 \varepsilon$  als exakt anzusehen. Wegen (2) ergibt sich

$$a' = \frac{W}{\beta} \left[ \alpha - \varepsilon \eta' \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \right] \approx \frac{W}{\beta} (\alpha - \bar{y}), \quad (10)$$

da  $\alpha$  von der Größenordnung  $\varepsilon$  ist, und  $a = \frac{W}{\beta} (\alpha x - \bar{y})$ .

Damit ist  $\varphi$  gemäß (8) völlig bestimmt. Denn durch Einsetzen von (10) in (8) erhält man zunächst

$$\varphi = \frac{W}{\beta} \sum_{v=0}^{\infty} (\alpha x - \bar{y}) \frac{(-\beta y)^v}{v!} = \frac{W}{\beta} \left[ \alpha (x - \beta y) - \sum_{v=0}^{\infty} \bar{y}^{(v)}(x) \frac{(-\beta y)^v}{v!} \right].$$

Nach Taylor ist aber

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{y}^{(v)}(x)}{v!} (-\beta y)^v = \bar{y}(x - \beta y),$$



wo  $\bar{y}$  als Funktionszeichen,  $\bar{y}(x - \beta y)$  als analytischer Ausdruck für das Profil im Argument  $x - \beta y$  aufzufassen ist, so daß das Störpotential in

$$\varphi = \frac{W}{\beta} [\alpha (x - \beta y) - \bar{y}(x - \beta y)]$$

oder verständlicher in

$$\varphi = \frac{W}{\beta} [\alpha \xi - \bar{y}(\xi)] \quad \text{mit} \quad \xi = x - \beta y \quad (11)$$

gegeben ist. Die Komponenten der Störgeschwindigkeit berechnen sich demnach aus

$$\frac{u}{W} = \frac{1}{\beta} [\alpha - \bar{y}'(\xi)]; \quad \frac{v}{W} = -[\alpha - \bar{y}'(\xi)]. \quad (12)$$

An der Oberfläche des Tragflügels geht  $\xi$  in  $x - \beta \bar{y} \equiv x - \beta \varepsilon \eta(x)$  und  $\bar{y}(\xi)$  in

$$\bar{y}(x - \beta \bar{y}) \equiv \varepsilon \eta[x - \beta \varepsilon \eta(x)]$$

über. Nach Taylor ist aber

$$\bar{y}(x - \beta \bar{y}) = \varepsilon \left\{ \eta(x) - \frac{\beta \varepsilon \eta(x)}{1!} \eta'(x) + \dots \right\} \approx \varepsilon \eta(x),$$

ebenso

$$\alpha(x - \beta \bar{y}) \equiv \alpha[x - \beta \varepsilon \eta(x)] \approx \alpha x,$$

so daß das Störpotential und die Übergeschwindigkeit am Profil in den Formeln

$$\varphi = \frac{W}{\beta} [\alpha x - \bar{y}(x)], \quad u = \frac{W}{\beta} [\alpha - \bar{y}'(x)], \quad v = -W [\alpha - \bar{y}'(x)] \quad (13)$$

erfaßt sind. Bezeichnet man den örtlichen Anstellwinkel mit  $\vartheta$  und benutzt  $\beta = \operatorname{ctg} \mu$ , so hat man an der Oberseite des Tragflügels die Geschwindigkeitskomponenten in der einfachen Form<sup>3</sup>

$$u = W \vartheta \operatorname{tg} \mu; \quad v = -W \vartheta.$$

(11) und (12) vermitteln das bekannte Ergebnis, daß die Stromlinien innerhalb des Machschen Keils parallel zur Profilkontur, außerhalb dieser Zone parallel zum Vektor der Anblasgeschwindigkeit verlaufen. Die Deviationsbedingung, welche die Art der Störungsausbreitung beschreibt, besagt in  $\frac{b}{a'} = -\operatorname{tg} \mu$  zunächst, daß der Vektor der Störgeschwindigkeit an der Profilschne stets senkrecht zur Machschen Richtung steht. Dies gilt aber wegen (12)

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{tg} \mu$$

auch außerhalb des Tragflügels.

Werden die vorstehenden Entwicklungen mit (5) auf die Unterseite des Profils übertragen, so erhält man, wenn man zur Unterscheidung von Ober- und Unterseite die Indizes + und - benutzt,

$$u_{\pm} = \pm \frac{W}{\beta} (\alpha - \bar{y}'_{\pm}), \quad v_{\pm} = -W (\alpha - \bar{y}'_{\pm}). \quad (\overline{13})$$

Nachträglich kann man den Singularitätensatz des Profils sofort angeben. Auf Grund der Bedingungsgleichungen für die fiktive Quell-Senken-Verteilung (auf der Profilschne als Belegungslinie)

$$q(x) = b_+ - b_-,$$

für die fiktive Wirbelanordnung

$$\gamma(x) = a'_+ - a'_-,$$

<sup>3</sup> Vgl. R. Sauer: Theoretische Einführung in die Gasdynamik, S. 42. Berlin: Springer-Verlag. 1943. Dasselbst weitere Literaturangaben.



für das symmetrische

$$\bar{y}_{T+} = -\bar{y}_{T-}$$

und antimetrische Profil

$$\bar{y}_{S+} = +\bar{y}_{S-}$$

ergeben sich für ein Überschallprofil die Quellverteilung

$$q(x) = 2U \bar{y}_{T'}'(x) = 2W \bar{y}_{T'}' \quad (14a)$$

und Wirbelverteilung

$$\gamma(x) = 2 \operatorname{tg} \mu [V - U \bar{y}_{S'}'(x)] = 2W \operatorname{tg} \mu (\alpha - \bar{y}_{S'}'). \quad (14b)$$

Das Deviationsverfahren liefert sämtliche Ergebnisse in einem Zuge, was sich bei der Unterschallströmung noch stärker zeigen wird.

## 2. Die Geschwindigkeitsverteilung umströmter gewölbter Tragflügelprofile im Unterschallbereich.

Geht man mit dem Ansatz für das Störpotential

$$\varphi = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 + d(x)y^3 + \dots$$

in die linearisierte Differentialgleichung der stationären ebenen Unterschallströmung

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0; \quad \beta^2 = 1 - M^2 > 0, \quad (14)$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich gleicher Potenzen von  $y$  die Entwicklung

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \beta^{2\nu} \left[ a^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu}}{2\nu!} + b^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \right]. \quad (15)$$

Die beiden Deviationen  $a'(x) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0}$  und  $b(x) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0}$  sind aus der physikalischen Problemstellung zu ermitteln.

Erfolgt die Grundströmung unter dem kleinen Anstellwinkel  $\alpha$ , so hat man das resultierende Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = \bar{\Phi} + \varphi$$

der Randbedingung zu unterwerfen, wenn man

$$y = \varepsilon \eta(x), \quad \varepsilon \ll 1$$

als Profilgleichung und die Entwicklungen

$$a(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}(x) \varepsilon^{\kappa}, \quad b(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}(x) \varepsilon^{\kappa}$$

zwecks Koeffizientenvergleich bezüglich der  $\varepsilon$ -Potenzen benutzt.

Dann ergeben sich für die sukzessiven Näherungen der Deviation  $b$  folgende Bestimmungsgleichungen:

$$b_0 = -V; \quad b_1 = \eta'(U + a_0'); \quad b_2 = \eta' a_1' + \beta^2 \eta a_1''. \quad (16)$$

Die fehlende Deviationsbedingung würde das  $b_0$  zugeordnete  $a_0'$  liefern. Mit  $a_0'$  wäre  $b_1$  und mit  $b_1$  wiederum  $a_1'$  bekannt.

Zur Ableitung dieser zwischen  $a$  und  $b$  bestehenden Relation gehen wir von einer fiktiven Quell- und Wirbelanordnung auf der Profilschne als Belegungslinie aus. Sowohl das Quellpotential

$$\varphi_q = \frac{i}{2\pi\tau} \int_{-1}^{+1} q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2} d\xi \quad (17)$$

als auch das Potential, herrührend von einer Verteilung gerader Wirbel (senkrecht zur Profilschne) )

$$\varphi_\gamma = - \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta y}{x-\xi} d\xi \quad (18)$$

befriedigen unsere Potentialgleichung (14), wo  $\tau$  und  $\sigma$  beliebige Konstante bedeuten, über die man zweckmäßig verfügen kann.

Die induzierten Geschwindigkeitskomponenten werden

$$u_q = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-1}^{+1} \frac{q(\xi)(x-\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2}, \quad v_q = \frac{\beta y}{2\pi\tau} \int_{-1}^{+1} \frac{q(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2} \quad (19)$$

bzw.

$$u_\gamma = \frac{\beta y}{2\pi\sigma} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2}, \quad v_\gamma = - \frac{\beta}{2\pi\sigma} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)(x-\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2} \quad (20)$$

und ihre Grenzwerte für  $y \rightarrow 0$ :

$$(u_q)_y=0 = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-1}^{+1} \frac{q(\xi)d\xi}{x-\xi}, \quad (v_q)_y=0 = \frac{\beta}{\tau} \frac{q(x)}{2}, \quad (19)$$

$$(u_\gamma)_y=0 = \frac{1}{\sigma} \frac{\gamma(x)}{2}; \quad (v_\gamma)_y=0 = \frac{\beta}{2\pi\sigma} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)d\xi}{\xi-x}. \quad (20)$$

Da wir uns in dieser Arbeit nicht mit der Druckverteilung befassen, die ja nach der Bernoullischen Gleichung unmittelbar mit der Geschwindigkeitsverteilung gegeben ist, werden wir die Konstanten zweckmäßig so normieren, daß die inkompressible Vergleichsströmung um dasselbe Profil erfolgen soll wie in der jetzigen Betrachtung. Wird die Singularitätenverteilung  $q(x)$  und  $\gamma(x)$  als strömungsmäßiger Körperersatz aufgefaßt, so untersuchen wir bei kompressibler und inkompressibler Strömung das gleiche Profil, wenn  $q(x)$  und  $\gamma(x)$  von  $M$  unabhängig sind, was mit

$$\tau = \beta; \quad \sigma = 1 \quad (21)$$

erreicht wird.

Wir haben somit folgende Bestimmungsgleichungen für die Deviationen

$$u_\pm(x, 0) = a'_\pm = \pm \frac{\gamma(x)}{2} + \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-1}^{+1} \frac{q(\xi)d\xi}{x-\xi}, \quad (22a)$$

$$v_\pm(x, 0) = b_\pm = \pm \frac{q(x)}{2} + \frac{\beta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)d\xi}{\xi-x}, \quad (22b)$$

wo die oberen bzw. unteren Vorzeichen und Indizes für Ober- bzw. Unterseite des Profils gelten.

Aus (22b) entnimmt man

$$\frac{1}{2} [b_+(x) + b_-(x)] = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)d\xi}{\xi-x} = \bar{v}(x). \quad (23)$$

Diese Integralgleichung hat die Lösung<sup>4</sup>

$$\gamma(x) = - \frac{2}{\beta\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} \bar{v}(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{\xi-x}. \quad (24)$$

<sup>4</sup> Fuchs-Hopf-Seewald: Aerodynamik II, S. 67.



Ebenfalls aus (22 b) folgt

$$b_+(x) - b_-(x) = q(x).$$

Durch Einsetzen der  $b$ -Ausdrücke erhält man, wenn man sich der Abkürzungen

$$b_\alpha = \frac{b_+ + b_-}{2}, \quad b_\beta = \frac{b_+ - b_-}{2}$$

bedient, die Deviationsbedingung

$$a'_\pm = \pm \frac{1}{\beta\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} b_\alpha(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\beta\pi} \int_{-1}^{+1} b_\beta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi}. \quad (25)$$

Mit der zweckmäßigen Substitution  $\xi = \cos \vartheta'$ , ( $x = \cos \vartheta$ ) werden die Integrale von (25) zu

$$J_\alpha = \int_{-1}^{+1} b_\alpha(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi} = - \int_0^\pi b_\alpha(\vartheta') \frac{1 + \cos \vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta',$$

$$J_\beta = \int_{-1}^{+1} b_\beta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} = - \int_0^\pi b_\beta(\vartheta') \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta',$$

die sich oft mit der nützlichen Formel

$$\int_0^\pi \frac{\cos n \vartheta' d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} = \pi \frac{\sin n \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (26)$$

bequem auswerten lassen. Die Rückübersetzung der entstehenden Ausdrücke  $\frac{\sin n \vartheta}{\sin \vartheta}$  in Polynome  $(n-1)$ -ten Grades von  $x$  erfolgt gemäß

$$S_0 = 0; \quad S_1 = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta} = 1;$$

$$S_2 = \frac{\sin 2 \vartheta}{\sin \vartheta} = 2x; \quad S_3 = \frac{\sin 3 \vartheta}{\sin \vartheta} = -1 + 4x^2;$$

$$S_4 = \frac{\sin 4 \vartheta}{\sin \vartheta} = -4x + 8x^3; \quad S_5 = \frac{\sin 5 \vartheta}{\sin \vartheta} = 1 - 12x^2 + 16x^4 \text{ usw.}$$

Wir hatten nach (16)  $b_0 = -V$  und erhalten über (25)

$$a'_{0\pm} = \pm W \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (26)$$

In der linearisierten Theorie wird  $b_I = \varepsilon b_1 = W \bar{y}'(x)$  und mit (25)

$$a'_{I\pm}(x) = \frac{W}{\beta\pi} \int_{-1}^{+1} \left\{ \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \bar{y}'_S(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} + \bar{y}'_T(\xi) \right\} \frac{d\xi}{x-\xi}, \quad (27)$$

wenn man die Eigenschaften des symmetrischen Profils („Tropfen“)  $\bar{y}_{T+} = -\bar{y}_{T-}$  und die des antimetrischen Profils („Skelett“, Wölbungsform)  $\bar{y}_{S+} = +\bar{y}_{S-}$  berücksichtigt. Nunmehr sind die Deviationen in

$$a'_\pm(x) = \frac{W}{\beta} \left[ \pm \alpha \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} \bar{y}'_S(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \bar{y}'_T(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \right] \quad (28b)$$

$$\text{und} \quad b_\pm(x) = W(\bar{y}' - \alpha) \quad (28a)$$

gegeben und die Komponenten der Störgeschwindigkeit nach (15) bekannt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \beta^{2\nu} \left[ a^{(2\nu+1)}(x) \frac{y^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!} + b^{(2\nu+1)}(x) \frac{y^{2\nu+1}}{(2^{\nu} \nu + 1)!} \right], \quad (29a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = b + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \beta^{2\nu} \left[ a^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu-1}}{(2^{\nu} \nu - 1)!} + b^{(2\nu)}(x) \frac{y^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!} \right]. \quad (29b)$$

Mit den Deviationen ist auch die Singularitätenverteilung

$$q(x) = b_+(x) - b_-(x) \text{ und } \gamma(x) = a'_+(x) - a'_-(x)$$

unmittelbar gegeben. Man erhält die Quellverteilung

$$q(x) = 2 W \bar{y}_T'(x) \quad (30a)$$

und die Wirbelverteilung

$$\gamma(x) = \frac{2 W}{\beta} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[ \alpha + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} y_s'(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi} \right], \quad (30b)$$

so daß sich die Übergeschwindigkeit für beliebige  $y$  aus

$$u = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)q(\xi) + \beta^2 y \gamma(\xi)}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2} d\xi, \quad (31)$$

$$v = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y q(\xi) + (\xi-x) \gamma(\xi)}{(x-\xi)^2 + \beta^2 y^2} d\xi$$

mit  $q$  und  $\gamma$  gemäß (30) berechnet.

An der Oberfläche des Tragflügels ergeben sich im Rahmen der linearisierten Theorie die einfacheren Formeln  $u = a'(x)$ ,  $v = b(x)$  nach (28a) und (28b), da  $a'$  und  $b$  bereits von der Größenordnung  $\varepsilon$  sind.

### 3. Die inkompressible Vergleichsströmung um gewölbte Tragflügelprofile.

Durch die Normierung (21) wurde erreicht, daß die inkompressible Vergleichsströmung ( $\beta = 1$ ) um dasselbe Profil wie in der kompressiblen Betrachtungsweise erfolgt. Da die inkompressible Strömung exakt von der Laplaceschen Differentialgleichung  $\Delta \Phi = 0$  erfaßt wird, werden die Linearisierungseinschränkungen hinfällig. Wir können also Profile mit runder Profilnase bei beliebigem Anstellwinkel ( $V \lesseqgtr U$ ) untersuchen, was zweckmäßig in elliptischen Koordinaten geschieht<sup>5</sup>.

Der Zusammenhang der Cartesischen Koordinaten  $x, y$  mit den elliptischen  $\lambda, \vartheta$  ist eindeutig in

$$x = \mathfrak{Cof} \lambda \cos \vartheta; \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad (32)$$

$$y = \mathfrak{Sin} \lambda \sin \vartheta; \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

gegeben. Für kleine  $y$  bzw.  $\lambda$  gelten die angenäherten Beziehungen

$$x = \cos \vartheta, \quad y = \lambda \sin \vartheta \quad (32)$$

$\lambda = \text{const}$  sind Ellipsen mit den Brennpunkten  $x = \pm 1$ .

$\vartheta = \text{const}$  stellen halbe Hyperbeläste dar, die auf der  $x$ -Achse entspringen. Insbesondere ist  $\lambda = 0$  die doppelt zu durchlaufende Strecke zwischen  $x = \pm 1$ , deren Oberseite durch  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , deren Unterseite durch  $\pi = \vartheta = 2\pi$  definiert ist. Die

<sup>5</sup> Vgl. W. Schultz-Piszachich: Über eine potentialtheoretische Methode zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung umströmter Körper. Dissertation Universität Wien, 1947.



Winkel  $\vartheta$  und  $2\pi - \vartheta$  bestimmen zwei übereinanderliegende Punkte der Ober- und Unterseite dieser Strecke, die wir als Profilschne wählen.

Die Potentialgleichung erhält in den neuen Koordinaten die einfache Form

$$\varphi_{\lambda\lambda} + \varphi_{\vartheta\vartheta} = 0. \quad (33)$$

Für kleine  $\lambda$  werde ihr der Ansatz

$$\varphi = a(\vartheta) + b(\vartheta)\lambda + c(\vartheta)\lambda^2 + d(\vartheta)\lambda^3 + \dots$$

unterworfen, wobei die Entwicklung

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left[ a^{(2\nu)}(\vartheta) \frac{\lambda^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!} + b^{(2\nu)}(\vartheta) \frac{\lambda^{2\nu+1}}{(2^{\nu+1} \nu!)!} \right] \quad (34)$$

gewonnen wird.

Bei Berücksichtigung der Regularitätsbedingung ( $\varphi_{\lambda \rightarrow \infty} = 0$ ) hat man als vollständige Lösung von (33)

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda} (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta). \quad (35)$$

Die Deviationen  $a'(\vartheta)$  und  $b(\vartheta)$  (die von den Funktionen  $a'(x)$  und  $b(x)$  des vorigen Abschnitts zu unterscheiden sind) werden

$$b(\vartheta) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = \sum_{n=1}^{\infty} -n (A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta)$$

und

$$a'(\vartheta) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)_{\lambda=0} = \sum_{n=1}^{\infty} n (-A_n \sin n\vartheta + B_n \cos n\vartheta).$$

Die Fourier-Koeffizienten  $A_n, B_n$  kann man durch  $b$  ausdrücken und in die Reihe für  $a'$  einsetzen. Man erhält so die Deviationsbedingung in der Form

$$a'(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\vartheta') \frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{1 - \cos(\vartheta - \vartheta')} d\vartheta' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\vartheta') \frac{\sin \vartheta + \sin \vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} d\vartheta'$$

oder mit

$$2b_{\alpha} = b(\vartheta) - b(2\pi - \vartheta), \quad 2b_{\beta} = b(\vartheta) + b(2\pi - \vartheta),$$

$$a'(\vartheta) = \frac{1 - \cos \vartheta}{\pi} \int_0^{\pi} b_{\alpha}(\vartheta') \frac{1 + \cos \vartheta'}{\sin \vartheta'} \frac{d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{\pi} \int_0^{\pi} b_{\beta}(\vartheta') \frac{d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta}.$$

Die unter dem Anstellwinkel  $\alpha$  erfolgende Anströmung besitzt das Geschwindigkeitspotential

$$\bar{\Phi} = Ux + Vy = W (\cos \alpha \mathfrak{C} \cos \lambda \cos \vartheta + \sin \alpha \mathfrak{S} \sin \lambda \sin \vartheta),$$

während die resultierende Geschwindigkeit  $w$  sich aus dem Potential  $\Phi = \bar{\Phi} + \varphi$  gemäß

$$w_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S} \sin^2 \lambda + \sin^2 \vartheta}} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad w_{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{S} \sin^2 \lambda + \sin^2 \vartheta}} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

ableitet. Durch Auswertung der Randbedingung

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda = \varepsilon \Lambda(\vartheta)} = \varepsilon \Lambda'(\vartheta) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right)_{\lambda = \varepsilon \Lambda'(\vartheta)}$$

mit  $\lambda = \varepsilon \Lambda(\vartheta)$  als Profildifferential in elliptischen Koordinaten gewinnt man sukzessive

Näherungen für die Deviation  $b$ , wenn man die auftretenden Ausdrücke nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt, nämlich

$$a(\vartheta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_{\kappa}(\vartheta) \varepsilon^{\kappa}, \quad b(\vartheta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}(\vartheta) \varepsilon^{\kappa}, \quad \text{Sin } \varepsilon \Lambda \text{ und } \text{Cos } \varepsilon \Lambda.$$

Die ersten Näherungen werden

$$b_0 = -V \sin \vartheta; \quad b_1 = -W \frac{d}{d\vartheta} [\Lambda \{\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha\}]; \quad b_2 = \frac{d}{d\vartheta} (a_1' \Lambda) \text{ usw.}$$

Über die Deviationsbedingung sind die korrespondierenden  $a'$ -Näherungen zu berechnen. Es wird  $a_0' = -V(1 - \cos \vartheta)$ , während die weiteren Iterationen erst nach Vorgabe der speziellen Profilform ausführbar sind.

Als resultierende Geschwindigkeit an der Tragflügeloberfläche

$$w = \sqrt{w_\vartheta^2 + w_\lambda^2} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \Lambda'^2 w_\vartheta}$$

ergibt sich nunmehr die Formel

$$w = \frac{1}{\sqrt{\text{Sin}^2 \lambda + \text{sin}^2 \vartheta}} \left\{ K_0 - W [\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha] + \varepsilon (K_1 + a_1') + \varepsilon^2 [K_2 + a_2' + b_1' \Lambda - \frac{\Lambda^2}{2} W \sin(\vartheta - \alpha) - \frac{\Lambda'^2}{2} W [\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha]] + \varepsilon^3 \dots + \dots \right\}. \quad (37)$$

Die hinzugefügten Konstanten  $K_0, K_1, K_2, \dots$  sind auf den bekannten Umstand zurückzuführen, daß der Potentialströmung eine konstante Zirkulation  $\Gamma$  zu überlagern ist, welche das Zusatzpotential  $\frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta = \varphi_0$  liefert. Die Deviation  $\left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi + \varphi_0) \right]_{\lambda=0} = b(\vartheta)$  bleibt hierbei ungeändert, während man bezüglich  $a'(\vartheta)$  das Glied  $\left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial \vartheta} \right)_{\lambda=0} = \frac{\Gamma}{2\pi} = C$  hinzufügen muß, so daß die vollständige Deviationsbedingung

$$a'(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\vartheta') \frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{1 - \cos(\vartheta - \vartheta')} d\vartheta' + C,$$

lautet. Diese Konstante ist bei jeder Näherung zu berücksichtigen, was in (37) geschehen ist.  $C$  läßt sich leicht aus der Staupunkts- oder Abflußbedingung bestimmen, was am Beispiel eines elliptischen Profils gezeigt werden soll.

Das elliptische Profil  $\lambda = \varepsilon$  besitzt die Halbachsen  $\text{Cos } \varepsilon$  und  $\text{Sin } \varepsilon$  und die relative Dicke  $\delta = \text{Tg } \varepsilon = \varepsilon$ . Setzt man die sukzessiven Deviationsnäherungen

$$\begin{aligned} b_0 &= -V \sin \vartheta, & a_0' &= -V(1 - \cos \vartheta), \\ b_1 &= -W \cos(\vartheta - \alpha), & a_1' &= -W [\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha], \\ b_2 &= b_1, & a_2' &= a_1' \end{aligned}$$

in (37) ein, so folgt in zweiter Näherung

$$\frac{w}{W} = \frac{-1}{\sqrt{\text{Sin}^2 \lambda + \text{sin}^2 \vartheta}} \left\{ \sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha + K_0 + \varepsilon [\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha + K_1] + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha + K_2 \right] \right\}.$$

Soll der zweite Staupunkt zur Erzeugung glatten Abflusses am Ende der großen Halbachse ( $\vartheta = 0$ ) liegen, so haben wir die Bedingung  $w(0) = 0$  durch entsprechende Konstantenbestimmung, nämlich  $K_0 = 0, K_1 = 0, K_2 = -\frac{1}{2} \sin \alpha$  zu erfüllen.

Damit wird die resultierende Geschwindigkeit an dem elliptischen Profil  $\lambda = \varepsilon$  zu

$$\frac{w}{W} = - \frac{\sin(\vartheta - \alpha) + \sin \alpha}{\sqrt{\text{Sin}^2 \lambda + \text{sin}^2 \vartheta}} \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right) \quad (38)$$



in Übereinstimmung mit der strengen Formel<sup>6</sup>, wo  $\varepsilon^*$  an Stelle der Anfangsentwicklung  $1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$  zu setzen ist.

Für Profile mit dem Hinterkantenwinkel  $K = 0$  (Juokowsky-Profile) werden die Konstanten sämtlich zu Null. Denn für diesen Profiltyp ist an der Hinterkante  $\vartheta = 0$  auch  $\Lambda(0) = 0$ , womit  $b_n(0) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) und  $a_n'(0) = K_n$  folgen. Soll der hintere Staupunkt an der Stelle  $\vartheta = 0$  liegen, so muß

$$w(0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda + \sin^2 \vartheta}} (K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2 + \dots)$$

gelten, d. h.  $K_n = 0$ .

An der Profilnase  $\vartheta = \pi$  wird die Geschwindigkeit nach (37)

$$w(\pi) = -\frac{2V}{\varepsilon \Lambda(\pi)} + \frac{a_1'(\pi)}{\Lambda(\pi)}, \quad (39)$$

geht also mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $\infty$ , wie es für Profile mit verschwindendem Vorderkantenwinkel sein muß. Aus (37) erkennt man, daß sonst nur Geschwindigkeiten endlicher Größe auftreten. Für die Ellipse wird die Geschwindigkeit im vorderen Scheitelpunkt

$$w_E(\pi) = -2V \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (40)$$

Die Abszisse der Profilnase wird allgemein

$$x(\pi) = -\zeta_0[\lambda = -1 - \frac{\lambda^2(\pi)}{2} = -1 - \frac{R}{2}, \quad (41)$$

wo  $R$  den Nasenradius des Profils bedeutet. Da diese bekannte Bedingung<sup>7</sup> bei Benutzung elliptischer Koordinaten von selbst erfüllt ist, erfolgen Untersuchungen an der Profilnase zweckmäßig in diesen Koordinaten.

An der Hinterkante ( $\vartheta = 0$ ) konvergieren die Entwicklungen dieses Abschnittes nur für Profile mit dem Hinterkantenwinkel  $K = 0$  oder  $K = \pi$ , was an der Benutzung elliptischer Koordinaten liegt. Durch Verwendung von Kreisbogenzweieck-Koordinaten könnten auch Profile mit beliebigem Hinterkantenwinkel in dieser Weise behandelt werden.

#### 4. Anwendung des Deviationsverfahrens als Iterationsverfahren.

##### Die Singularitätenverteilung umströmter Tragflügelprofile.

Die folgende Diskussion der einzelnen Deviationsnäherungen soll einen tieferen Einblick in die Strömungsverhältnisse vermitteln.

Behandelt man die inkompressible Strömung in Cartesischen Koordinaten und unterwirft die Entwicklung für das Störpotential  $\varphi$  gemäß (15)

$$\varphi = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \left[ a^{(2v)}(x) \frac{y^{2v}}{2^v v!} + b^{(2v)}(x) \frac{y^{2v+1}}{(2v+1)!} \right]$$

der Randbedingung, so können ab  $n = 2$  die  $b$ -Näherungen mittels der Rekursionsformel

$$b_n = \frac{d}{dx} \left[ \sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v a_{n-2v-1}^{(2v+1)}(x) \frac{\eta^{2v+1}}{(2v+1)!} + \sum_{v=0}^{n-2} (-1)^v b_{n-2v-2}^{(2v+1)}(x) \frac{\eta^{2v+2}}{(2v+2)!} \right] \quad (42)$$

<sup>6</sup> Durand: Aerodynamic Theory, Vol. 1, B VIII 4. Berlin: Julius Springer. 1934.

<sup>7</sup> Vgl. Helmbold-Keune: Beiträge zur Profilmforschung. Luftf.-Forsch., Bd. 20, Lfg. 5.

$$(n = 2, 3, \dots) \text{ neben } b_0 = -V, \quad b_1 = \frac{d}{dx} (U \eta + \eta \alpha'_0) \quad (43)$$

erfaßt werden.

Um von einer bekannten Näherung  $b_m, \alpha'_m$  zur nächsthöheren  $b_{m+1}, \alpha'_{m+1}$  zu gelangen, hat man  $b_{m+1}$  nach der Rekursionsformel (43) und das korrespondierende  $\alpha'_{m+1}$  nach der Deviationsbedingung

$$a'_+ = \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} b_\alpha(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} b_\beta(\xi) \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (44)$$

zu berechnen. Damit ist das Iterationsverfahren eindeutig festgelegt, nach dem die Geschwindigkeitsverteilung bis zu einem beliebig hohen Näherungsgrad ( $\varepsilon^N$ ) mechanisch ermittelbar ist.

Die roheste Näherung (nullter Ordnung)

$$b_0 = -V, \quad a'_{0\pm} = \pm V \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

führt wegen

$$q = b_+ - b_-, \quad \gamma = a'_+ - a'_-$$

auf die Quell-Senken- und Wirbelverteilung

$$q_0 = 0, \quad \gamma_0 = 2V \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (45)$$

Das ist der bekannte Singularitätensatz der ebenen Platte ( $y = 0, -1 \leq x \leq +1, z = z$ ) nach Birnbaum<sup>8</sup>.

In der ersten Näherung

$$b_{I\pm} = \frac{d}{dx} (U y_\pm + \bar{y}_\pm \alpha'_{0\pm}) = \frac{d}{dx} \left( U \bar{y}_\pm \pm V \bar{y}_\pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$$

werde das Profil  $y = \bar{y}(x)$  in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt  $\bar{y} = \bar{y}_T + \bar{y}_S$ . Das symmetrische Profil hat die Eigenschaft  $\bar{y}_{T+} = -\bar{y}_{T-}$ , während die Wölbungsform der Bedingung  $y_{S+} = \bar{y}_{S-}$  genügt. Demnach wird

$$q_I = b_{I+} - b_{I-} = 2 \frac{d}{dx} \left( U \bar{y}_T + V \bar{y}_S \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right). \quad (46)$$

Der erste Summand von (46) bedeutet die bei Längsanblasung ( $\alpha = 0$ ) auftretende, von Föttinger<sup>9</sup> gefundene Quelldichte, welche proportional zur Querschnittsänderung des umströmten Tragflügels ist. Der zweite Summand von (46) ist die von Keune<sup>10</sup> gefundene Quellverteilung, die bei der Queranblasung ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) von Skeletten auftritt.

Die Wirbelverteilung berechnet sich nach (24) aus der auf Ober- und Unterseite gleichen Normalgeschwindigkeit  $\bar{v} = \frac{1}{2} (b_+ + b_-)$ . Diese wird in erster Näherung

$$\bar{v}_I = \frac{d}{dx} \left( V \bar{y}_T \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + U \bar{y}_S \right). \quad (47)$$

Der erste Summand von (47) führt auf die von Keune berechnete Wirbelverteilung der Queranblasung des Tropfens, während der zweite Ausdruck von (47) aus der Birnbaumschen Theorie der Skelette bekannt ist.

<sup>8</sup> Birnbaum: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. angew. Math. Mech. 3, 290 (1923).

<sup>9</sup> Föttinger: Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffsbau. Jb. Schiffsbau-Ges. 1924, 295.

<sup>10</sup> Helmbold-Keune: Beiträge zur Profildforschung. Luftf.-Forsch. Bd. 20, Lfg. 1, S. 1; Lfg. 2, S. 81; Lfg. 3, S. 152; Lfg. 5, S. 192; Lfg. 6, S. 196.



(46) und (47) wurden in zahlreichen verschiedenen Abhandlungen ermittelt, während das Deviationsverfahren diese Resultate in einem Zuge liefert und darüber hinaus die mechanische Berechnung höherer Näherungen gestattet.

Da sich  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) stets als Differentialquotient schreiben läßt, gilt allgemein  $\oint_{(\varphi)} w_n' ds = 0$ , wobei das Integral über eine die Belegungslinie umschließende Kurve ( $C$ ) zu erstrecken ist und  $w_n'$  die Normalkomponente der Übergeschwindigkeit bezüglich ( $C$ ) bedeutet, d. h. die Summe der Quellen ist gleich der Summe der Senken. Das ist einfach die notwendige Bedingung dafür, daß die Verdrängungsströmung das Profil als geschlossene Stromlinie enthält.

Die höheren Näherungen der Singularitätenverteilung sind mit

$$q_n = b_{n+} - b_{n-}, \quad \gamma_n = a'_{n+} - a'_{n-}$$

über (43) und (44) gegeben. In zweiter Näherung erhält man als Komponenten der Übergeschwindigkeit am Profil

$$\begin{aligned} u &= a_0' + a_I' + a_{II}' + b_I' \bar{y} - a_0''' \frac{\bar{y}^2}{2}, \\ v &= b_0 + b_I + b_{II} - (a_0'' + a_I'') \bar{y}. \end{aligned} \quad (48)$$

Die für (48) erforderlichen Deviationsnäherungen werden durch Iteration ermittelt. Man hat zunächst

$$b_{0\pm} = -V; \quad a'_{0\pm} = \pm V \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

und

$$b_{I\pm} = \frac{d}{dx} \left[ \bar{y}_{\pm} \left( U \pm V \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right].$$

Zur Auswertung der Deviationsbedingung benötigt man die Ausdrücke

$$\bar{v} = b_{\alpha} = \frac{b_+ + b_-}{2} \quad \text{und} \quad \frac{q}{2} = b_{\beta} = \frac{b_+ - b_-}{2},$$

die in erster Ordnung nach (47) und (46) die Form

$$b_{I\alpha} = \bar{v}_I = \frac{d}{dx} \left( V \bar{y}_T \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + U \bar{y}_S \right)$$

und

$$b_{I\beta} = \frac{q_I}{2} = \frac{d}{dx} \left( U \bar{y}_T + V \bar{y}_S \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$$

erhalten, womit  $a_I'$  bekannt ist. Es ergibt sich nach (44)

$$a'_{I\pm} = \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{I\alpha}(x) + \frac{1}{\pi} J_{I\beta}(x),$$

mit

$$J_{I\alpha}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\xi} \left[ V \bar{y}_T(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + U \bar{y}_S(\xi) \right] \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi},$$

$$J_{I\beta}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\xi} \left[ U \bar{y}_T(\xi) + V \bar{y}_S(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right] \frac{d\xi}{x-\xi},$$

und somit die Wirbelverteilung der ersten Näherung

$$\gamma_I = a'_{I+} - a'_{I-} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{I\alpha}(x). \quad (49)$$

In zweiter Näherung war  $b_{II\pm} = \frac{d}{dx} (\bar{y}_{\pm} a'_{I\pm})$ , so daß sich über

$$b_{II\alpha} = \bar{v}_{II} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \bar{y}_T \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{I\alpha}(x) + \bar{y}_S J_{I\beta}(x) \right] \quad (50)$$

und

$$b_{II\beta} = \frac{q_{II}}{2} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \bar{y}_T J_{I\beta}(x) + \bar{y}_S \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{I\alpha}(x) \right]$$

$a'_{II}$  berechnen läßt. Mit den neuen Abkürzungen

$$J_{II\alpha}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\xi} \left[ \bar{y}_T(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} J_{I\alpha}(\xi) + \bar{y}_S(\xi) J_{I\beta}(\xi) \right] \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

und

$$J_{II\beta}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\xi} \left[ \bar{y}_T(\xi) J_{I\beta}(\xi) + \bar{y}_S(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right] \frac{d\xi}{x-\xi}$$

erhält man

$$a'_{II\pm} = \pm \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{II\alpha}(x) + \frac{1}{\pi^2} J_{II\beta}(x) \quad (51a)$$

und die Wirbelverteilung der zweiten Näherung

$$\gamma_{II} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} J_{II\alpha}(x). \quad (51b)$$

Damit ist die Geschwindigkeitsverteilung dieser Näherung völlig bestimmt. Entsprechend erfolgt die Berechnung höherer Näherungen durch Iteration.

(Eingegangen am 31. Oktober 1949.)

## Über den Trägheitspol des eben bewegten starren Systems und die Trägheitspolkurve des zentrischen Schubkurbelgetriebes.

Von Karl Federhofer, Graz.

Mit 4 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Die Trägheitspolkurve entsteht als Ort der Trägheitspole eines kontinuierlich bewegten ebenen Systems. Der vom Schwerpunkt einer ebenen Scheibe aus gemessene Ortsvektor des Trägheitspoles ist durch Drehpol, Wendepol und Trägheitshalbmesser vollständig bestimmt. Für die Koppel des zentrischen Schubkurbelgetriebes kann die Trägheitspolkurve mit großer Näherung durch eine Gerade senkrecht zur Koppelachse ersetzt werden, auf der innerhalb eines bestimmten Bereiches die Trägheitspole für den vollen Umlauf der Kurbel liegen.

**Summary.** The inertia pole curve presents the locus of the poles of inertia of a plain system in continuous motion. The locus vector of the pole of inertia, measured from the center of gravity of a plain disc, is entirely determinate by the centre of rotation, the turning pole and the radius of inertia. For the coupling of a central crank mechanism, the curve of the poles of inertia can be substituted with a good degree of approximation by a straight line normal to the coupling axis, the poles of inertia for a total turn of the crank laying on it within a certain reach.

**Résumé.** La courbe des pôles d'inertie représente le lieu géométrique des pôles d'inertie d'un système plane en mouvement continu. Le vecteur de lieu du pôle d'inertie, mesuré du point de gravité d'un disque plane, est déterminé définitivement par le centre de rotation, le pôle d'inflexion et le rayon d'inertie. Pour le couplage d'un mécanisme centré à manivelle, la courbe des pôles d'inertie se remplace avec bonne approximation par une ligne droite et perpendiculaire à l'axe de couplage; dans une certaine zone les pôles d'inertie pour un tour entier de la manivelle sont situés sur cette ligne.



### Einleitung.

Bei der graphodynamischen Untersuchung ebener Getriebe kommt den Trägheitspolen der einzelnen Getriebeglieder eine besondere Bedeutung zu, denn sie sind die Mittelpunkte jener geradlinig begrenzten Kraftbüschel, welche die Systeme der Trägheitskräfte der Getriebeglieder kennzeichnen.

Für ein um ein festes Gelenk drehbares Glied liegt dessen Trägheitspol im Schwingungsmittelpunkt dieses Gliedes, für ein nur translatorisch bewegtes Glied fallen Trägheitspol und Schwerpunkt zusammen. Im allgemeinen Fall eines eben bewegten Getriebegliedes stehen einfache Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung des Trägheitspoles zur Verfügung. Für gewisse Sonderlagen des Getriebes liefern aber diese Verfahren infolge schleifender Schnitte von Konstruktionslinien ungenaue Ergebnisse oder sie versagen, wenn die Pole der Bewegung (Drehpol, Wende- und Beschleunigungspol) außerhalb der Zeichenfläche liegen.

Für diese Fälle und auch für Kontrollzwecke ist die rechnerische Festlegung der Lage des Trägheitspoles erforderlich. Ich gebe hierfür in (1) eine einfache Formel an, mit der auch der Ort aller Lagen des Trägheitspoles eines Getriebegliedes für den Gang des Getriebes — die Trägheitspolkurve — im bewegten und festen System festgelegt ist. Diese wird in (3) für das einfachste und praktisch wichtigste Getriebe, die zentrische Schubkurbel, vollständig entwickelt; es wird gezeigt, daß die Trägheitspolkurve in der bewegten Pleuelstange hinreichend genau durch eine zu ihr senkrechte Gerade in der Entfernung  $\frac{i_s^2}{r \sigma}$  von ihrem Schwerpunkte dargestellt werden kann.

#### 1. Der Ortsvektor $r_T$ des Trägheitspoles $T$ .

Seien in Abb. 1  $P$  der augenblickliche Drehpol,  $J$  der Wendepol einer Scheibe mit dem Schwerpunkte  $S$ , dann geht die Wirkungslinie der Trägheitskraft  $\mathfrak{T}$ , die dem auf dem Wendekreise gelegenen Beschleunigungspole  $G$  zugeordnet ist, durch den Schwingungsmittelpunkt  $G^*$  der in  $G$  drehbar gedachten Scheibe; daher ist

$$\overline{SG^*} = \frac{i_s^2}{\overline{SG}}$$

mit  $i_s$  als Trägheitshalbmesser der Scheibenmasse  $m$  bezüglich  $S$ . Da  $\mathfrak{T} = -m b_s$ , wo  $b_s$  die Schwerpunktsbeschleunigung ist, so ist  $\mathfrak{T}$  parallel zu  $JW$ , wenn  $W$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $GS$  mit dem Wendekreis bezeichnet. Wandert  $G$  auf diesem, womit die bei festem  $J$  und  $P$  möglichen  $\infty^1$  Beschleunigungszustände der Scheibe erfaßt sind, so schneiden sich die Wirkungslinien der zugehörigen  $\infty^1$  Trägheitskräfte  $\mathfrak{T}$  im Trägheitspole  $T^1$ .

Dieser ist daher ein durch die Lage der Punkte  $P, J, S$  und durch  $i_s$  vollkommen bestimmter Punkt des bewegten Systems.

Läßt man  $G$  mit  $J$  zusammenfallen, so ist nach vorstehendem die Gerade  $JS$  die Wirkungslinie der Trägheitskraft, also Ort für den Punkt  $T$ . Für die Sonderlage  $G \equiv P$  geht die zugehörige Trägheitskraft durch den Punkt  $P^*$ , der durch  $\overline{SP^*} = \frac{i_s^2}{\overline{SP}}$  bestimmt ist und es ist ihre Wirkungslinie parallel zu  $W^*J$ , also senkrecht zu  $PS$ . Demnach ist der Trägheitspol  $T$  als Schnittpunkt der den beiden Sonderlagen von  $G$  entsprechenden Trägheitskräfte festgelegt durch

$$\overline{ST} = \frac{\overline{SP^*}}{\cos \delta} = \frac{i_s^2}{\overline{SP} \cos \delta}. \quad (1)$$

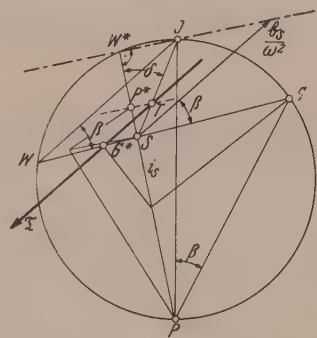


Abb. 1. Konstruktion des Trägheitspoles  $T$  einer Scheibe bei gegebenem Trägheitshalbmesser  $i_s$  und bekannter Lage der Punkte  $P, J, S$ .





Die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen der Systempunkte  $A$ ,  $B$  schneidet die Gerade  $AB$  in  $C$ ; nach dem Satze von Bobillier ist die Polbahntangente  $t$  festgelegt durch die Gleichheit der Winkel

$$\angle CPA = \angle BPt = \alpha.$$

Da sich der Kreuzkopf  $B$  geradlinig auf  $OB$  bewegt, so liegt der Wendepol  $J$  im Schnitte der Polbahnnormalen  $n$  mit der Geraden  $OB$ , so daß

$$\overline{BJ} = \overline{BP} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Mit

$$\vartheta = \angle CPB \text{ ist } \alpha = \vartheta - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

somit

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 + \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{ctg} \varphi}$$

oder wegen

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\overline{OB}}{\overline{BP} - \overline{OC}} = \frac{\chi_1 \operatorname{ctg} \varphi}{\chi_1 - \lambda \cos \varphi};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\chi_1}{\lambda \sin \varphi \cos^2 \varphi} - \operatorname{tg} \varphi.$$

Hiermit wird

$$\overline{BJ} = \overline{BP} \operatorname{ctg} \alpha = r \chi_2,$$

wobei

$$\chi_2 = \frac{1}{\lambda^2 \cos^3 \varphi} (\chi_1^2 + \lambda \chi_1 \cos^3 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi). \quad (6)$$

Mit  $s = \overline{SB}$  als Entfernung des Schwerpunktes  $S$  der Pleuelstange von  $B$  ist

$$r_J^2 = s^2 + \overline{BJ}^2 - 2s \cdot \overline{BJ} \chi_1,$$

$$r_P^2 = s^2 + \overline{BP}^2 - 2s \cdot \overline{BP} \lambda \sin \varphi;$$

da  $D^2 = \overline{BJ}^2 + \overline{BP}^2$ , so berechnet sich der Nenner in Gl. (3) zu

$$2s (\overline{BJ} \chi_1 + \overline{BP} \lambda \sin \varphi) - 2s^2$$

oder mit Beachtung der für  $\overline{BJ}$  und  $\overline{BP}$  geltenden Ausdrücke (6) und (5) nach einigen Umformungen und mit  $\sigma = \frac{s}{r}$ ;

$$D^2 - (r_J^2 + r_P^2) = \frac{2r^2 \sigma}{\lambda^2 \cos^3 \varphi} [\chi_1^3 + \lambda (1 - \sigma \lambda) \cos^3 \varphi].$$

Hiermit wird nach Gl. (3)

$$|\mathbf{r}_T| = \frac{i s^2}{r} \frac{\lambda^2 \cos^3 \varphi \sqrt{\sigma^2 + \chi_2^2 - 2\sigma \chi_1 \chi_2}}{\sigma [\chi_1^3 + \lambda (1 - \sigma \lambda) \cos^3 \varphi]}.$$

Bezeichnet  $\psi$  den Winkel von  $\mathbf{r}_T$  mit  $\overrightarrow{BS}$ , so ist

$$\cos \psi = \frac{\overline{BJ} \cos \beta - s}{r_J}, \quad \sin \psi = \frac{\overline{BJ} \sin \beta}{r_J}$$

oder

$$\cos \psi = \frac{\chi_1 \chi_2 - \sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \chi_2^2 - 2\sigma \chi_1 \chi_2}}, \quad \sin \psi = \frac{\chi_2 \lambda \sin \varphi}{\sqrt{\sigma^2 + \chi_2^2 - 2\sigma \chi_1 \chi_2}};$$

hiermit ergeben sich die Koordinaten des Trägheitspoles  $T$  in bezug auf das durch  $S$  gelegte  $(\xi, \eta)$  Achsenkreuz (Abb. 3) mit

$$\left. \begin{aligned} \xi_T = r_T \cos \psi &= \frac{i s^2}{r} \frac{\chi_1 (\chi_1^2 + \lambda \chi_1 \cos^3 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) - \sigma \lambda^2 \cos^3 \varphi}{\sigma [\chi_1^3 + \lambda (1 - \sigma \lambda) \cos^3 \varphi]}, \\ \eta_T = r_T \sin \psi &= \frac{i s^2}{r} \frac{\lambda \sin \varphi (\chi_1^2 + \lambda \chi_1 \cos^3 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)}{\sigma [\chi_1^3 + \lambda (1 - \sigma \lambda) \cos^3 \varphi]}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Lage des Trägheitspoles der Pleuelstange ist hiernach abhängig vom Kurbelwinkel  $\varphi$ , vom Längenverhältnisse  $\lambda$  der Pleuelstange zur Kurbel und von dem die Lage des Schwerpunktes  $S$  der Pleuelstange kennzeichnenden Parameter  $\sigma = \frac{s}{r}$ .

Mit der Annahme eines in Stangenmitte liegenden Schwerpunktes, also  $s = \frac{l}{2}$  (demnach  $\sigma = \frac{s}{r} = \frac{s}{l} \cdot \frac{l}{r} = \frac{1}{2\lambda}$ ) und für einen vollen Umlauf der Kurbel ( $\varphi$  von 0 bis  $360^\circ$  zunehmend in Schritten von  $10^\circ$ ) ist die Abhängigkeit der Koordinaten  $\xi_T$ ,  $\eta_T$  von  $\lambda$  für  $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  aus den Zahlenangaben der Tab. 1 zu ersehen, welche die zugehörigen homogenen Koordinaten

$$\bar{\xi}_T = \frac{\xi_T}{iS^2/r} \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{\eta}_T = \frac{\eta_T}{iS^2/r} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

enthält.

Tabelle 1. Homogene Koordinaten  $\bar{\xi}_T$ ,  $\bar{\eta}_T$  des Trägheitspoles  $T$ :

$$\bar{\xi}_T = \frac{\xi_T}{iS^2/r} \cdot \frac{1}{\lambda}; \quad \bar{\eta}_T = \frac{\eta_T}{iS^2/r} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \text{ für } s = \frac{l}{2}, \text{ das heißt: } \sigma = \frac{1}{2\lambda}.$$

Kurbel- winkel $\varphi^\circ$	$\lambda = 1/3$			$\lambda = 1/5$			$\lambda = 1/10$		
	$\bar{\xi}_T$	$\bar{\eta}_T$	$\eta: \eta_{\max}$	$\bar{\xi}_T$	$\bar{\eta}_T$	$\eta: \eta_{\max}$	$\bar{\xi}_T$	$\bar{\eta}_T$	$\eta: \eta_{\max}$
0	2.0000	0	0	2.0000	0	0	2.0000	0	0
10	1.9925	0.394	0.1859	1.9975	0.378	0.1849	1.9994	0.363	0.1806
20	1.9732	0.764	0.3603	1.9909	0.736	0.3603	1.9978	0.711	0.3537
30	1.9502	1.092	0.5147	1.9833	1.059	0.5187	1.9960	1.031	0.5129
40	1.9341	1.371	0.6461	1.9783	1.339	0.6561	1.9948	1.313	0.6532
50	1.9329	1.605	0.7568	1.9782	1.575	0.7716	1.9949	1.553	0.7726
60	1.9479	1.804	0.8503	1.9832	1.767	0.8654	1.9960	1.746	0.8687
70	1.9717	1.966	0.9269	1.9909	1.913	0.9370	1.9979	1.890	0.9403
80	1.9925	2.079	0.9801	1.9975	2.008	0.9835	1.9994	1.979	0.9846
90	2.0000	2.121	1	2.0000	2.041	1	2.0000	2.010	1
100	1.9929	2.076	0.9785	1.9977	2.006	0.9825	1.9994	1.978	0.9841
110	1.9774	1.941	0.9150	1.9920	1.898	0.9297	1.9980	1.882	0.9363
120	1.9615	1.730	0.8157	1.9860	1.723	0.8441	1.9964	1.724	0.8577
130	1.9529	1.466	0.6909	1.9823	1.493	0.7313	1.9954	1.512	0.7522
140	1.9547	1.171	0.5521	1.9825	1.222	0.5988	1.9954	1.255	0.6244
150	1.9659	0.868	0.4091	1.9866	0.927	0.4543	1.9965	0.966	0.4806
160	1.9815	0.569	0.2683	1.9927	0.621	0.3040	1.9980	0.654	0.3254
170	1.9948	0.281	0.1323	1.9979	0.311	0.1521	1.9994	0.330	0.1642
180	2.0000	0	0	2.0000	0	0	2.0000	0	0

Nach (7) ist

$$\bar{\xi}_T(\varphi) = \bar{\xi}_T(2\pi - \varphi), \quad \bar{\eta}_T(\varphi) = -\eta_T(2\pi - \varphi).$$

Die Werte  $\xi_T$  erweisen sich gegenüber Änderungen des Kurbelwinkels  $\varphi$  und des Parameters  $\lambda$  fast völlig unempfindlich, eine zeichnerische Darstellung ihrer Änderungen im gleichen Maßstabe wie jene der sehr maßgeblichen Änderungen von  $\eta_T$  mit  $\varphi$  und  $\lambda$  ist nicht möglich; hiernach kann die durch die Koordinaten  $\xi_T$ ,  $\eta_T$  bestimmte Trägheitspolkurve für die zentrische Schubkurbel hinreichend genau durch eine Gerade senkrecht zur Pleuelstange in der Entfernung  $\xi_T = \frac{iS^2}{r\sigma}$ , die den Sonderwerten von  $\xi_T$  für  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  entspricht, ersetzt werden. Auf dieser Geraden liegen innerhalb des Bereiches  $\pm \frac{iS^2}{r\sigma} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$  (gleich  $\eta_{T\max}$  für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$ ) die Trägheitspole für alle Kurbelstellungen von  $\varphi = 0$  bis  $2\pi$ .



In Abb. 4 sind diese den Werten  $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  entsprechenden parallelen Geraden mit den Bezifferungen der Kurbelwinkel dargestellt; für dazwischen liegende Werte von  $\varphi$  und  $\lambda$  ist hiermit einfache Interpolation zur Gewinnung der entsprechenden  $\bar{\eta}_T$  möglich. Die Tab. 1 enthält auch die den Annahmen  $\lambda = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  entsprechenden Zahlenwerte  $\frac{\eta}{\eta_{\max}}$ .

Zur Feststellung des Einflusses der Schwerpunktslage der Pleuelstange auf die Lage des Trägheitspols wurden dessen Koordinaten  $\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T$  unter Zugrundelegung eines mittleren  $\lambda$ -Wertes gleich  $\frac{1}{5}$  mit der Annahme  $s = \frac{2}{3}l$  (Schwerpunkt um  $\frac{l}{6}$  aus dem Mittel der Pleuelstange gegen den Kurbelzapfen hin verschoben) für einen vollen Umlauf der Kurbel berechnet.

Es ist dann  $\sigma = \frac{s}{r} = \frac{2}{3\lambda}$  gegenüber  $\sigma = \frac{1}{2\lambda}$  für Schwerpunkt in Stangenmitte.

Die Tab. 2 enthält die hiermit erhaltenen Werte  $\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T$  nebst den Verhältniszahlen  $\frac{\eta}{\eta_{\max}}$ .

Außerdem ist die prozentuale Abweichung  $\Delta$  der für  $\frac{s}{l} = \frac{2}{3}$  und  $\frac{s}{l} = \frac{1}{2}$  erhaltenen  $\frac{\eta}{\eta_{\max}}$  angegeben, also

$$\Delta\% = 100 \left[ \left( \frac{\eta}{\eta_{\max}} \right)_{\frac{s}{l} = \frac{2}{3}} - \left( \frac{\eta}{\eta_{\max}} \right)_{\frac{s}{l} = \frac{1}{2}} \right] \text{ bei } \lambda = \frac{1}{5};$$

diese Abweichung schwankt hiernach für einen Kurbelumlauf zwischen  $+1.09\%$  und  $-1.04\%$ ; sie verschwindet für die Kurbellagen  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ .

Abb. 4. Die Ordinate  $\bar{\eta}_T$  des Trägheitspols der Pleuelstange einer zentrischen Schubkurbel in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel  $\varphi$  und von  $\lambda$  (Gl. 7).

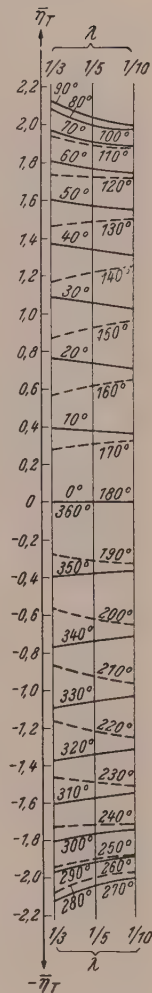


Tabelle 2. Homogene Koordinaten  $\bar{\xi}_T, \bar{\eta}_T$  des Trägheitspols  $T$  für

$$s = \frac{2}{3}l, \text{ das heißt: } \sigma = \frac{2}{3\lambda}.$$

Kurbel- winkel $\varphi^\circ$	$\lambda = 1/5$				Kurbel- winkel $\varphi^\circ$	$\lambda = 1/5$			
	$\bar{\xi}_T$	$\bar{\eta}_T$	$\eta : \eta_{\max}$	$\Delta\%$		$\bar{\xi}_T$	$\bar{\eta}_T$	$\eta : \eta_{\max}$	$\Delta\%$
0	1.50000	0	0	0	100	1.49823	1.50384	0.98231	-0.02
10	1.49802	0.29154	0.19043	+0.55	110	1.49401	1.42128	0.92838	-0.13
20	1.49299	0.56610	0.36978	+0.95	120	1.48948	1.28652	0.84036	-0.37
30	1.48722	0.81083	0.52963	+1.09	130	1.48681	1.10910	0.72447	-0.68
40	1.48342	1.01948	0.66593	+0.98	140	1.48708	0.90224	0.58934	-0.95
50	1.48347	1.19188	0.77854	+0.69	150	1.49019	0.67953	0.44387	-1.04
60	1.48734	1.33066	0.86919	+0.38	160	1.49466	0.45173	0.29507	-0.99
70	1.49315	1.43661	0.93840	+0.14	170	1.49848	0.22485	0.14687	-0.52
80	1.49811	1.50595	0.98369	+0.02	180	1.50000	0	0	0
90	1.50000	1.53092	1	0					

(Eingegangen am 22. Februar 1951.)

# Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen.

Von R. Bereis, Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Zunächst werden differentialgeometrische Grundbegriffe für ebene Kurven in komplexer Darstellung behandelt und dabei neue einheitliche Konstruktionsmethoden für den Krümmungskreis und die Affinnormale aufgezeigt. Sodann wird eine umfassende Theorie der ebenen Bewegung in komplexer Darstellung skizziert, wobei der Drehwinkel der bewegten Ebene als Parameter fungiert. Heftet man an jeden Systempunkt  $z$  den um  $2 - n$  Rechte geschwenkten  $n$ -ten Ableitungsvektor  $z^{(n)}$  an, so fallen ihre Enden für jedes  $n$  in einen Punkt  $P_n$ , den  $n$ -ten Pol zusammen. Mit Hilfe der so entstehenden Polkette  $P_1, P_2 \dots P_n$  ergeben sich nicht nur einheitliche, durchsichtige Verfahren für die konstruktive Behandlung der ebenen Bewegung, sondern auch die Möglichkeit einer beliebig genauen Approximation einer Bewegung durch eine geeignete andere in dem betrachteten Augenblick.

**Summary.** At first the fundamental concepts of differential geometry concerning plane curves in complex representation are treated and at the same time new uniform construction methods for the circle of curvature and the affine normale are shown. Next a comprehensive theory of the plane motion in complex representation is outlined, in which the rotation angle is used as a parameter. By attaching to every system point  $z$  the  $n$ th vector of derivation  $z^{(n)}$  turned by  $2 - n$  right angles, their ends coincide for every  $n$  in one point  $P_n$  which is called the  $n$ th pole. By means of the pole chain  $P_1, P_2 \dots P_n$  constructed in this manner, not only a uniform, clear process for the constructional treatment of the plane motion is developed, but also the possibility of substitution for a certain movement by another suitable one in the moment just considered, is given to any degree of approximation.

**Résumé.** Au début, quelques concepts fondamentaux de la géométrie différentielle sont traités au sujet des courbes planes en représentation complexe et à cette occasion sont démontrées des méthodes nouvelles unitaires de construction du cercle osculateur et de la normale affine. Ensuite, est esquissée une théorie étendue du mouvement en plan en représentation complexe; l'angle de torsion du plan mû est employé comme paramètre. Si l'on attache à chaque point  $z$  du système le vecteur de dérivation  $z^{(n)}$  tourné de  $2 - n$  angles droits, leurs bouts coïncident pour n'importe quel  $n$  dans un point  $P_n$  le  $n$ -ième pôle. À l'aide de la chaîne des pôles  $P_1, P_2 \dots P_n$  apparaissant de cette manière, ils en résultent non seulement des procédés unitaires et clairs pour le traitement constructif du mouvement en plan, mais aussi la possibilité d'approcher un mouvement par un autre approprié dans le moment en considération, ceci jusqu'au degré voulu d'exactitude.

## 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zur Behandlung der ebenen Kinematik mittels komplexer Zahlen<sup>1</sup> liefern. Zugrunde liegt die geläufige Vorstellung der Gaußschen Zahlenebene, in der jeder reelle Punkt durch eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  gekennzeichnet wird, die seine Normalkoordinaten  $x, y$  zusammenfaßt. Da die Vermehrung aller  $z$  um eine komplexe Konstante  $c = a + bi$  eine Verschiebung der Ebene bedeutet, die Multiplikation mit einer Konstanten von Einsbetrag, die etwa durch  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$  angesetzt werden kann, hingegen eine Drehung bewirkt, so erscheinen die komplexen Zahlen zur Beschreibung und Untersuchung ebener Bewegungsvorgänge hervorragend geeignet.

<sup>1</sup> Komplexe Zahlen sind für diese Zwecke schon des öftern, wenn auch nicht systematisch, herangezogen worden. So vor allem von: R. Mehmke: Über die Bewegung eines starren Systems in seiner Ebene. Z. Math. Physik **35**, 1—24, 65—81 (1890). — F. Morley: On adjustable cycloidal and trochoidal curves. Amer. J. Math. **16** (1894). — F. Schilling: Über neue kinematische Modelle usw. Z. Math. Physik **44**, 214—227 (1899). — A. Haarbleicher: Application des coordonnées isotropes à l'étude de la courbe des trois barres. J. éc. pol. **2**, 31 (1933). — E. Hackmüller: Eine analytisch durchgeführte Ableitung der Kreispunkts- und Mittelpunktskurve. Z. angew. Math. Mech. **18**, 252—254 (1938). — W. Wunderlich: Höhere Radlinien. Österr. Ing.-Arch. **1**, 295 (1947).



Eine Erweiterung des Arbeitsbereiches ergibt sich, wenn man die konjugiert komplexen Größen  $\bar{z} = x - i y$  hinzunimmt. Der Übergang vom Normalkoordinatenpaar  $x, y$  zu dem Zahlenpaar  $z, \bar{z}$  stellt ja eine zwar imaginäre, jedoch durchaus reguläre lineare Koordinatentransformation dar, und läßt man nun für  $z$  und  $\bar{z}$  beliebige komplexe, nicht notwendig konjugierte Zahlen zu, so erfaßt man durch diese sogenannten „Minimalkoordinaten“ auch die imaginären Punkte der Ebene.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst differentialgeometrische Grundbegriffe für ebene Kurven in komplexer Darstellung behandelt und dabei neue einheitliche Konstruktionsmethoden für den Krümmungskreis und die Affinnormale ebener Kurven aufgezeigt. Dann folgt die Bestimmung des hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels, der Scheitelpunkte und der Affinevolute. Betrachtungen über Schmiegekegelschnitte und sextaktische Punkte beschließen die differentialgeometrische Einführung.

Anschließend wird eine umfassende Theorie der ebenen Bewegung in komplexer Darstellung in groben Umrissen skizziert, wobei als Parameter der Drehwinkel  $\varphi$  der bewegten Scheibe zugrunde gelegt wird, was der Annahme einer gleichförmigen Drehung gleichkommt. Dies ist ohne weiteres statthaft, da in dieser Arbeit nur differentialgeometrische Eigenschaften der Bahn-, Hüll- und Polkurven untersucht werden, während Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhältnisse ganz in den Hintergrund treten.

Ist eine Bewegung durch diesen Drehwinkel  $\varphi$  als Parameter dargestellt, und hängt man an jeden Punkt  $z$  die um  $2 - n$  Rechte geschwenkten Ableitungsvektoren  $z^{(n)}$  an, so fallen deren Spitzen für jedes  $n$  in einem Punkt  $P_n$  zusammen, der „Pol  $n$ -ter Ordnung“ genannt wird; insbesondere ist  $P_1$  das Momentanzentrum,  $P_2$  der Wendepol, die Gerade  $P_1 P_3$  trägt den Ballschen Punkt usw. Die zu einem einzigen Augenblick gehörige Polkette  $P_1, P_2, P_3 \dots$  ist vom Koordinatensystem unabhängig und bestimmt eine analytische Bewegung vollständig; sie ist mit der von R. Müller betrachteten Kette der Wendepole identisch. Die ersten  $n$  Glieder der Polkette sind ein Äquivalent für  $n + 1$  zusammengestellte Lagen der bewegten Scheibe.

Auf diese Weise gelangt man zu einer einheitlichen und sehr durchsichtigen Behandlung der ebenen Kinematik, die sich auch zeichnerisch auswerten läßt und zu einfachen Konstruktionsvorschriften für die Krümmungskreise und Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven führt. Hierbei ergibt sich nicht nur die bekannte kubische Kreispunktkurve als Ort aller Punkte, die gerade einen Scheitel durchlaufen, sondern auch eine Quartik als Ort aller Punkte, die fünfpunktig berührende Bahnschmiegeparabeln besitzen, und schließlich eine Quintik als Ort jener Punkte, die sich gerade in einem sextaktischen Punkt ihrer Bahn befinden. Darüber hinaus werden auch noch septaktische und oktaktische Punkte (mit sieben- bzw. achtpunktig berührenden Bahnschmiegekegelschnitten) betrachtet. Da ferner ein einfacher Zusammenhang zwischen den Polen und den Ableitungsvektoren der Polkurven (beliebiger Ordnung) besteht, lassen sich auch die letzteren weitgehend konstruktiv erfassen.

Abschließend wird gezeigt, daß durch Verwendung der Polkette eine beliebig genaue Approximation einer Bewegung durch eine geeignete andere für den betrachteten Augenblick ermöglicht wird. Stimmen nämlich zwei Bewegungen in einem Moment in den ersten  $n$  Polen überein, so berühren einander die Bahnkurven jedes Punktes von  $n$ -ter Ordnung. Zur Approximation einer Bewegung erscheinen vor allem die höheren Planetenbewegungen besonders geeignet. Wertvolle Ratschläge für Stoffauswahl und Aufbau sowie anderweitige Anregungen verdankt der Verfasser Herrn Prof. Dr. Wunderlich.

## 2. Differentialgeometrische Grundbegriffe für ebene Kurven in komplexer Darstellung.

Eine Kurve unserer Ebene denken wir uns mit Hilfe eines reellen Parameters  $t$ , der als Zeit gedeutet werden mag, durch eine komplexe Funktion

$$z = z(t) = x(t) + i y(t) \quad (1)$$

dargestellt; die Funktion sei als stetig und hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt.

### 1. Tangente.

Der zu zwei aufeinanderfolgenden Kurvenpunkten  $t$  und  $t + h$  gehörige Sehnenvektor  $z(t + h) - z(t)$  geht nach Division durch  $h \neq 0$  mit  $h \rightarrow 0$  gegen den Tangentenvektor  $z' = dz/dt$ , der die Richtung der Tangente im Punkte  $t$  anzeigt. Ein Verschwinden des ersten Ableitungsvektors  $z'$  wird im allgemeinen auf eine Spitze hinweisen, kann allerdings auch in der Parameterdarstellung begründet sein.

### 2. Krümmungskreis.

Da  $z' i$  den um  $\pi/2$  geschwenkten Tangentenvektor angibt, wird die Kurvennormale  $n$  mittels eines reellen Längenparameters  $\lambda$  durch

$$\zeta = z + \lambda z' i \quad (2)$$

dargestellt. Elimination von  $\lambda$  aus (2) und der konjugierten Beziehung liefert die Gleichung der Kurvennormalen in Minimalkoordinaten:

$$(\zeta - z) \bar{z}' + (\bar{\zeta} - \bar{z}) z' = 0. \quad (3)$$

Durch die Ableitung nach  $t$  gewinnt man eine Gerade  $n'$

$$(\zeta - z) \bar{z}'' + (\bar{\zeta} - \bar{z}) z'' = 2 z' \bar{z}', \quad (4)$$

die  $n$  im Berührungspunkt mit der eingehüllten Evolute, also im Krümmungsmittelpunkt schneidet. Die Gerade  $n'$  steht ersichtlich auf den zweiten Ableitungsvektor  $z''$  senkrecht. Sie ist aber auch die Polare des Punktes  $z + z'$  bezüglich des Kreises

$$(\zeta - z) (\bar{\zeta} - \bar{z}) = z' \bar{z}', \quad (5)$$

wie man sich leicht überzeugt. Es gilt somit

**Satz 1:** Für jeden Punkt  $z$  einer ebenen Kurve  $z = z(t)$  liegt die Spitze des in  $z$  befestigten Vektors  $z''$  zum zugehörigen Krümmungsmittelpunkt konjugiert bezüglich eines Kreises um  $z$  mit  $|z'|$  als Radius<sup>2</sup>.

Durch Auflösung der Gl. (3) und (4) nach  $\zeta$  erhält man die komplexe Koordinate des Krümmungszentrums mit

$$\zeta = z + 2 z' \frac{z' \bar{z}'}{z' \bar{z}'' - \bar{z}' z''}. \quad (6)$$

Abb. 1 zeigt als Anwendung von Satz 1 die Konstruktion der Krümmungsmitte für einen beliebigen Punkt einer Ellipse. Bezeichnet  $a$  die dem zugehörigen Ellipsenhalbmesser äquivalente komplexe Zahl,  $b$  entsprechend den konjugierten Halb-

<sup>2</sup> Die von einem Kurvenpunkt  $z$  ausstrahlenden Ableitungsvektoren  $z'$  und  $z''$ , die nach Gesagtem den Krümmungsmittelpunkt bestimmen, spannen das sogenannte „Krümmungsdreieck“ auf, das A. Kanda eingeführt hat: Beiträge zur reinen Differentialgeometrie, Mh. Math. Physik 24, 44 (1913). Die von Kanda angegebene Konstruktionsvorschrift zur Ermittlung der Krümmungsmitte ist eine der vielen Möglichkeiten zur Bestimmung des auf der Kurvennormalen liegenden konjugierten Punktes von  $z + z'$  bezüglich des Kreises (5).



messer, dann läßt sich die Ellipse anschreiben mit

$$z = a \cos t + b \sin t.$$

Für den betrachteten Punkt  $t = 0$  ist  $z = a$ ,  $z' = b$ ,  $z'' = -a$  und es gilt demnach:

Der Mittelpunkt  $M$  einer Ellipse und der zu einem Kurvenpunkt  $z$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $\zeta$  liegen konjugiert bezüglich eines Kreises um  $z$ , dessen Durchmesser die Länge des zu  $z$  konjugierten Ellipsendurchmessers aufweist.

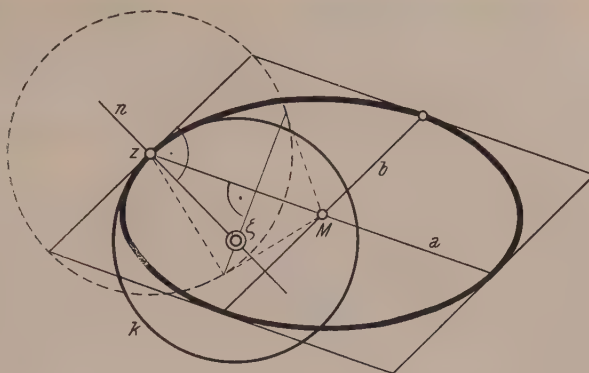


Abb. 1.

### 3. Affinnormale.

Für die Endpunkte  $z_1, z_2$  einer zur Tangente im Kurvenpunkt  $z$  parallelen Sehne besteht die Bedingungsgleichung

$$(z', z_1 - z_2) = 0, \quad (7)$$

wobei hier wie in Zukunft  $(a, b)$  die mit  $i/2$  multiplizierte Determinante  $a\bar{b} - \bar{a}b$  bedeuten soll<sup>3</sup>. Faßt man  $z$  als Nullpunkt der Parameterskala auf, so liefert die Taylor-Entwicklung für  $z_1, z_2$ :

$$\begin{cases} z_1 = z + z' t_1 + \frac{1}{2} z'' t_1^2 + \frac{1}{3!} z''' t_1^3 + \dots \\ z_2 = z + z' t_2 + \frac{1}{2} z'' t_2^2 + \frac{1}{3!} z''' t_2^3 + \dots \end{cases} \quad (8)$$

Die Verbindungsgerade des Kurvenpunktes  $z$  mit der Sehnenmitte  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  hat die Richtung des Vektors

$$Z = z_1 + z_2 - 2z = z'(t_1 + t_2) + \frac{1}{2} z''(t_1^2 + t_2^2) + \dots$$

und strebt mit  $t_{1,2} \rightarrow 0$  gegen eine Grenzlage, die Affinnormale oder Deviationsachse der Kurve in  $z$  heißt<sup>4</sup>. Ihre Richtung ergibt sich mit Benutzung der zu (7) gleichwertigen Bedingung

$$(z', z'')(t_1 + t_2) + \frac{1}{3} (z', z''')(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) + \dots = 0,$$

aus der zunächst  $\frac{t_2}{t_1} \rightarrow -1$  folgt, mit

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{Z}{t_1^2} = z'' + \delta z', \quad (9)$$

wobei

$$\delta = -\frac{1}{3} \frac{(z', z''')}{(z', z'')}.$$

Die Gleichung der Affinnormalen lautet dann

$$(\zeta - z, z'' + \delta z') = 0. \quad (10)$$

<sup>3</sup> Geometrisch bedeutet  $(a, b) = \frac{i}{2} (a\bar{b} - \bar{a}b) = - (b, a)$  die Fläche des von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms.  $(a, b) = 0$  ist die Bedingung für parallele Lage der Vektoren  $a$  und  $b$ .

Man beachte das Distributivitätsgesetz  $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$  sowie die Ableitungsregel  $(a, b)' = (a', b) + (a, b')$ .

<sup>4</sup> L. N. M. Carnot: Geometrie de position, p. 477—480. Paris. 1803. — A. Transon: Liouv. J. Math. (1) 6 (1841). — W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, 15 (1923).





Der Mittelpunkt dieses „Schmiegekegelschnittes“ ergibt sich demnach aus der Gleichung der Affinnormalen

$$(\zeta - z, z'' + \delta z') = 0$$

und ihrer Ableitung

$$(\zeta - z, z''' + \delta z'' + \delta' z') = (z', z'')$$

mit

$$\zeta = z + \frac{(z', z'')(z'' + \delta z')}{(z'' + \delta z', z''' + \delta z'' + \delta' z')} \quad (13)$$

Aus Zentrum und Krümmungskreis ist der Schmiegekegelschnitt eindeutig konstruierbar (vgl. Abb. 1), weshalb auf die explizite Gleichung verzichtet werden soll. Seine Art hängt offensichtlich vom Vorzeichen der Nennerdeterminante ab, da dieses die Lage des Mittelpunktes links oder rechts von der hohlen Seite der Kurve entscheidet. Verschwindet für einen Punkt  $z$  diese Determinante, so wird der Mittelpunkt des Schmiegekegelschnittes ein Fernpunkt, das heißt der Schmiegekegelschnitt ist in diesem Fall eine Parabel. Die Existenzbedingung für eine fünfpunktig berührende, sogenannte „ruhende Schmiegeparabel“ ist mithin

$$(z'' + \delta z', z''' + \delta z'' + \delta' z') = 0 \quad (14)$$

oder nach Ersatz von  $\delta$  und  $\delta'$  gemäß (9)

$$3(z', z'')[4(z'', z''') + (z' z^{IV})] - 5(z', z''')^2 = 0. \quad (15)$$

### 6. Sextaktische Punkte.

Ist für eine Stelle  $z$  die durch (13) gegebene Mittelpunktskoordinate  $\zeta$  des Schmiegekegelschnittes stationär, gilt also  $\zeta' = 0$ , so berührt der Schmiegekegelschnitt (mindestens) sechspunktig, und man spricht von einem sextaktischen Punkt. Die Affinevolute weist an der zugehörigen Stelle im allgemeinen eine Spitze auf.

Die Bedingung  $\zeta' = 0$  ergibt ausgewertet nach einiger Rechnung

$$(z', z'')^2 [(z', z^V) + 5(z'', z^{IV})] - 5(z' z'')(z', z''') [(z', z^{IV}) + 2(z'', z''')] + \frac{40}{9}(z', z''')^3 = 0. \quad (16)$$

### 3. Ebene Bewegung und Umkehrbewegung.

Eine starre ebene Scheibe  $\Sigma$  bewege sich in ihrer Ebene  $\Sigma_0$ . Zur mathematischen Beschreibung des Bewegungsvorganges nehmen wir in  $\Sigma_0$  ein Normalkoordinatensystem  $x, y$  mit dem Ursprung  $A_0$  an, analog in der bewegten Scheibe ein mit dieser verbundenes Achsenkreuz ( $A; \xi, \eta$ ). Es sei im folgenden stets eine einparametrische oder zwangsläufige Bewegung  $\mathfrak{B}$  vorausgesetzt, bei der also jeder Punkt an eine vollkommen festgelegte Bahn gebunden ist. Ferner wollen wir die trivialen (und in gewisser Hinsicht singulären) reinen Schiebungen ausschalten, bei welchen sämtliche Bahnkurven kongruent und gleichgestellt sind. Unter diesen Umständen bietet sich der Drehwinkel  $\varphi = \angle x\xi$  als natürlicher Parameter dar, und seine Verwendung gestaltet die Rechnungen tatsächlich besonders einfach.

Ist also die Bahnkurve des bewegten Ursprunges  $A$  durch die komplexe Gleichung

$$z = a(\varphi) \quad (17)$$

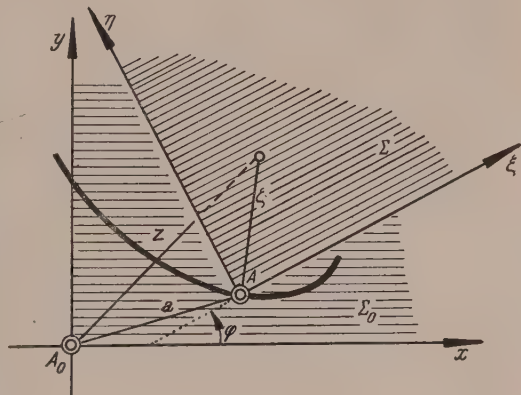


Abb. 3.

gegeben, dann wird die Bahn eines beliebigen Punktes  $\zeta$  von  $\Sigma$  durch

$$z = a + \zeta e^{i\varphi} \quad (18)$$

beschrieben (Abb. 3). Die Gl. (18) kann mithin als „Gleichung der Bewegung  $\mathfrak{B}$ “ angesehen werden.

Für einen Beobachter in der bewegten Ebene  $\Sigma$  erscheint dieselbe ruhend, während  $\Sigma_0$  die „Umkehrbewegung“  $\mathfrak{B}^*$  ausführt, deren Gleichung sich durch Auflösung von (18) nach  $\zeta$  zu

$$\zeta = -a e^{-i\varphi} + z e^{-i\varphi} \quad (19)$$

ergibt.

#### 4. Momentanpol, Bahntangenten.

Bildet man durch Ableitung der Bahnkurvengleichung (18) nach  $\varphi$  den Tangentenvektor

$$z' = a' + \zeta i e^{i\varphi} = a' + (z - a) i \quad (20)$$

und hängt man ihn nach Drehung um  $\pi/2$  im Punkt  $z$  an, so gelangt man zum Punkt

$$z + z' i = a + a' i = p_1. \quad (21)$$

Dieser Punkt ist unabhängig von  $z$  und wird als 1. Pol der Bewegung (für den betrachteten Augenblick) bezeichnet. Er läßt sich auch durch  $z' = 0$  kennzeichnen, stellt also den einzigen in diesem Augenblick ruhenden Punkt dar, dessen Bahn mithin (im allgemeinen) eine Spitze aufweist. Der 1. Pol ist natürlich identisch mit dem bekannten Momentanzentrum. Es gilt also

**Satz 3:** Ist eine Bewegung mittels des Drehwinkelparameters beschrieben, dann fallen die Endpunkte sämtlicher, um einen rechten Winkel geschwenkten und in den Systempunkten  $z$  angehefteten ersten Ableitungsvektoren  $z'$  im 1. Pol, dem Momentanzentrum  $P_1$  zusammen.

Hierauf gründet sich die geläufige Konstruktion der Bahntangente eines beliebigen Systempunktes: Sie steht normal auf die Verbindung des Punktes mit dem Momentanpol, den „Polstrahl“ des Punktes.

Haben demnach zwei Bewegungen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  in einem bestimmten Augenblick den 1. Pol gemeinsam, so berühren einander die Bahnen jedes Punktes. Wir wollen sagen,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stimmen in 1. Ordnung überein. Dies gilt beispielsweise für eine Bewegung und eine Drehung um den 1. Pol, was der üblichen, mit dem Momentanzentrum verknüpften Vorstellung entspricht.

In anschaulicher, wenn auch nicht ganz strenger Weise können wir die Kenntnis des 1. Pols als Äquivalent für zwei benachbarte Lagen von  $\Sigma$  auffassen.

Ermitteln wir schließlich auf Grund von (19) analog den 1. Pol der Umkehrbewegung  $\mathfrak{B}^*$ , so finden wir

$$\zeta - \zeta' i = a' i e^{-i\varphi} = \pi_1^*; \quad (22)$$

die Lage dieses Punktes  $P_1^*$  im System  $\Sigma_0$  ist durch

$$a + \pi_1 e^{i\varphi} = a + a' i = p_1^*$$

gegeben, deckt sich also mit  $P_1$ . Es ist eine bekannte Tatsache, daß jede Bewegung mit ihrer Umkehr das Momentanzentrum gemein hat.

## 5. Wendepol, Bahnkrümmung.

### 1. Pol 2. Ordnung, Krümmungskonstruktion.

Zweimaliges Differenzieren der Bewegungsgleichung (19) nach  $\varphi$  liefert den zweiten Ableitungsvektor

$$z'' = a'' - \zeta e^{i\varphi} = a'' - (z - a), \quad (23)$$

der, an  $z$  angehängt, zum 2. Pol der Bewegung (für den betrachteten Augenblick)

$$z + z'' = a + a'' = p_2 \quad (24)$$

führt. Für ihn ist übrigens auch  $z'' = 0$ . Somit gilt

**Satz 4:** Ist eine Bewegung mittels des Drehwinkelparameters beschrieben, so fallen die Endpunkte sämtlicher in den Systempunkten  $z$  angehefteten zweiten Ableitungsvektoren  $z''$  im 2. Pol  $P_2$  zusammen.

Hierauf gründet sich unter Zuhilfenahme von Satz 1 eine einfache Konstruktion des Bahnkrümmungsmittelpunktes eines beliebigen Systempunktes  $z$  (Abb. 4): Er liegt im Schnittpunkt der Kurvennormale  $n$  mit der Polare des zweiten Poles bezüglich jenes Hilfskreises um  $z$ , der das Momentanzentrum  $P_1$  enthält<sup>5</sup>.

Haben demnach zwei Bewegungen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  in einem bestimmten Augenblick die beiden ersten Pole gemeinsam, so haben die Bahnkurven jedes Punktes gleiche Tangenten und überdies gleiche Krümmung. Wir sagen dafür,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stimmen in 2. Ordnung überein. Die Kenntnis der beiden ersten Pole kann demnach als Äquivalent für drei benachbarte Lagen der bewegten Ebene aufgefaßt werden<sup>6</sup>.

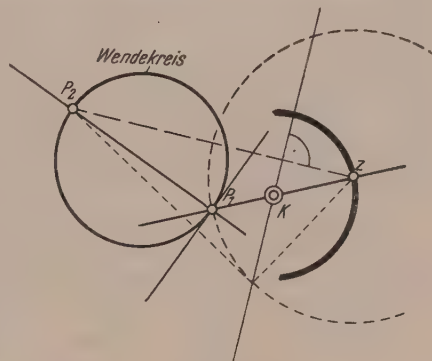


Abb. 4.

### 2. Wendekreis, Wendepol.

Wie aus Abb. 4 ohne weiteres zu erkennen ist, wird das Krümmungszentrum auf Grund dieser Konstruktion dann und nur dann unendlich fern, wenn  $\sphericalangle P_1 z P_2 = \pi/2$ , das heißt, wenn der Systempunkt  $z$  auf dem Thales-Kreis über  $P_1 P_2$  liegt. Dieser Kreis ist also der Ort jener Punkte, die augenblicklich einen Wendepunkt ihrer Bahn durchlaufen und wird daher Wendekreis genannt. Die Wendetangenten laufen wegen des rechten Winkels  $P_1 z P_2$  sämtlich durch den 2. Pol  $P_2$ , der demnach mit dem Wendepol<sup>7</sup> identisch ist.

Analog ermitteln wir aus (19)  $P_2^*$ , den 2. Pol der Umkehrbewegung  $\mathfrak{B}^*$ , und finden

$$\zeta + \zeta'' = -a'' e^{-i\varphi} + 2a' i e^{-i\varphi} = \pi_2^*; \quad (25)$$

<sup>5</sup> Der Ausnahmefall, daß das Momentanzentrum ins Unendliche rückt, soll in einer eigenen Arbeit behandelt werden. Die angegebene Konstruktion ist auch in allen jenen Sonderfällen verwendbar, wo andere Methoden besondere Grenzbetrachtungen verlangen, wie z. B. für die symmetrischen Scheitel der Trochoiden. Für höhere Radlinien hat W. Wunderlich (siehe Anm. 1) bereits die beiden ersten Pole zur Konstruktion des Bahnkrümmungsmittelpunktes  $K$  verwendet, ohne jedoch von der Tatsache Gebrauch zu machen, daß  $P_2$  und  $K$  bezüglich des genannten Hilfskreises konjugiert liegen.

<sup>6</sup> Für eine Bewegung, deren Momentanpol und Wendepol bekannt sind, hat bereits R. Beyer eine „Ersatzbewegung“, und zwar eine Ellipsenbewegung herangezogen, um zu einem beliebigen Punkt die Bahnkrümmung zu finden. Siehe R. Beyer: Krümmungsverhältnisse der ebenen Bewegung. Masch.-Bau Betrieb RM—AFG 15, 166 (1936).

<sup>7</sup> Ändert sich der Drehwinkel  $\varphi$  proportional zur Zeit (gleichförmige Drehung), so fällt der Beschleunigungspol  $z'' = 0$  in den Wendepol.



dies entspricht im raumfesten System  $\Sigma_0$  der Koordinate  $a + 2a'i - a'' = p_2^*$  woraus sich die bekannte Tatsache ablesen läßt, daß die Wendepole von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}^*$  bezüglich des gemeinsamen Momentanpoles  $a + a'i$  symmetrisch liegen.

### 3. Rückkehrkreis.

Sei  $z$  ein von  $P_1$  verschiedener Punkt des Wendekreises in  $\Sigma$ ,  $t_0$  seine ( $P_2$  enthaltende und in  $\Sigma_0$  gedachte) Bahntangente für die Bewegung  $\mathfrak{B}$ . Als Wendetangente hat  $t_0$  mit der Bahn von  $z$  drei zusammengerückte Punkte gemein. Umgekehrt gehen daher für  $\mathfrak{B}^*$  drei aufeinanderfolgende Lagen von  $t_0$  durch  $z$ , das heißt  $z$  ist ein Rückkehrpunkt der von  $t_0$  vermöge  $\mathfrak{B}^*$  in  $\Sigma$  erzeugten Hüllbahn.

Wir können daher aussprechen den

**Satz 5:** Jene Punkte eines zwangsläufig bewegten Systems, die augenblicklich Wendepunkte ihrer Bahnen durchlaufen, erfüllen einen Kreis („Wendekreis“), auf welchem die Pole  $P_1$  und  $P_2$  einen Durchmesser begrenzen; die Wendetangenten laufen sämtlich durch den „Wendepol“  $P_2$ . Jene Gerade des Systems, die augenblicklich Rückkehrtangenten ihrer Hüllbahn sind, bilden ein Strahlbüschel, dessen Scheitel  $P_2^*$  das Spiegelbild von  $P_2$  an  $P_1$  ist; die Spitzen erfüllen den „Rückkehrkreis“ mit dem Durchmesser  $P_1 P_2^*$ .

Da parallele Geraden parallele Hüllbahnen erzeugen, die gemeinsame Normalen (= Polstrahlen) und daher gemeinsame Krümmungsmitten besitzen, so folgt unmittelbar, daß alle diese Krümmungsmitten auf dem Rückkehrkreis liegen müssen.

### 6. Pol 3. Ordnung, Affinnormale, Schmiegeparabel, Scheitelkurve, Ballscher Punkt.

#### 1. Pol 3. Ordnung, Affinnormale, Schmiegeparabel.

Dreimaliges Differenzieren der Bewegungsgleichung (18) nach  $\varphi$  liefert den dritten Ableitungsvektor

$$z''' = a''' - \zeta i e^{i\varphi} = a''' - (z - a) i, \quad (26)$$

der nach Drehung um  $3\pi/2$  und an  $z$  angehängt, zum dritten Pol  $P_3$  der Bewegung (für den betrachteten Augenblick)

$$z - z''' i = a - a''' i = p_3 \quad (27)$$

führt.  $P_3$  ist ersichtlich auch durch  $z''' = 0$  gekennzeichnet. Es gilt

**Satz 5:** Ist eine Bewegung mittels des Drehwinkelparameters beschrieben, dann fallen die Endpunkte sämtlicher um drei Rechte geschwenkten und in den Systempunkten  $z$  angehefteten dritten Ableitungsvektoren  $z'''$  im dritten Pol  $P_3$  zusammen.

Die Kenntnis der ersten drei Pole  $P_1, P_2, P_3$  ermöglicht nach Satz 2 nicht nur die Konstruktion der Bahntangente und des Krümmungskreises, sondern auch der Affinnormalen<sup>8</sup> und damit der Schmiegeparabel für die Bahnkurve jedes Systempunktes  $z$ .

Haben zwei Bewegungen  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$  in einem bestimmten Augenblick die ersten drei Pole gemeinsam, so berühren einander die Bahnkurven jedes Systempunktes von 3. Ordnung (vier zusammengerückte Punkte). Wir sagen,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stimmen in dritter Ordnung überein. Wir können  $P_1, P_2, P_3$  als Äquivalent für vier benachbarte Lagen von  $\Sigma$  ansehen.

<sup>8</sup> G. Lochs: Die Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven bei einer ebenen Bewegung. Mh. Math. Physik 38, 51 (1931).

## 2. Scheitelskurve.

Kennt man für einen bestimmten Augenblick einer Bewegung die beiden ersten Pole  $P_1$ ,  $P_2$  und in einem Punkt  $z$  die Affinnormale seiner Bahn, so läßt sich unter Benützung von Satz 2 eine Ortsgerade  $o_3$  für den dritten Pol  $P_3$  finden. Insbesondere kann man eine einfache Konstruktionsvorschrift für  $o_3$  angeben, wenn man einen Scheitel  $S$  kennt, also einen Punkt mit stationärem Krümmungskreis, bei dem ja Affinnormale und Bahnnormale zusammenfallen. Dies gibt

**Satz 6:** Sind von einer Bewegung für einen bestimmten Augenblick die beiden ersten Pole  $P_1$ ,  $P_2$  und ein Bahnscheitel  $S$  bekannt, so liegt der dritte Pol  $P_3$  auf jener Geraden  $o_3$ , die mit der Strecke  $\overline{SP_1}$  ein Rechteck mit dem dreifachen Flächeninhalt jenes Rechtecks bestimmt, das die Scheiteltangente und Scheitelnormale mit der Gegenecke  $P_2$  festlegen (Abb. 5).

Beispiel: Die ersten drei Pole beim Gelenkviereck. Für jede gegebene Lage eines Gelenkvierecks findet man den Momentanpol im Schnittpunkt der beiden Kurbeln  $A A_0$  und  $B B_0$ , da diese die Bahnnormalen ihrer Endpunkte  $A$  und  $B$  darstellen. Der Wendepol  $P_2$  liegt zufolge Satz 1 auf der Polaren  $o_{2A}$  des Lagers  $A_0$  (= Krümmungsmitte der Bahn von  $A$ ) bezüglich des Kreises um  $A$  durch  $P_1$ , sowie auf der Polaren  $o_{2B}$  des Lagers  $B_0$  bezüglich des Kreises um  $B$  durch  $P_1$  und ist dadurch festgelegt, so daß damit auch Polkurventangente, Polkurvennormale und Wendekreis für den

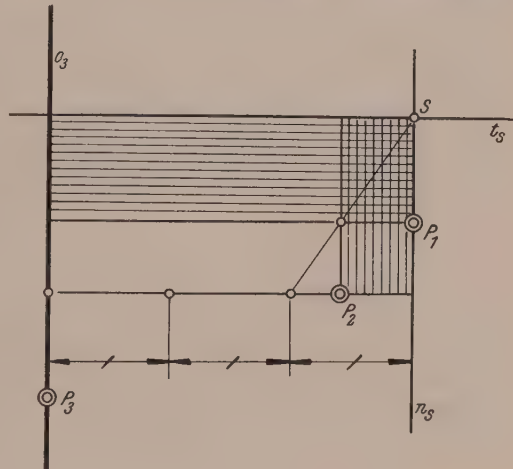


Abb. 5.

betrachteten Augenblick gefunden sind. Da ferner  $A$  und  $B$  Scheitel ihrer Bahn sind, erhält man durch Satz 6, wie Abb. 6 zeigt,  $o_{3A}$ ,  $o_{3B}$  zwei Ortsgerade für  $P_3$ .

In jedem Augenblick einer Bewegung werden durch Gl. (12)  $\infty^1$  Punkte definiert, die Scheitelpunkte ihrer Bahnkurven sind. Somit ist (12) die Gleichung dieser Scheitelskurve, auch Kreispunktkurve<sup>9</sup> genannt. Ausgeführt ergibt sich

$$3(z', z'')(z' i, z'') - (z', z''')(z' i, z') = 0. \quad (28)$$

Wir führen nun ein neues Koordinatensystem  $\mathfrak{z}$  mit dem Ursprung  $P_1$  ein. Der Wendepol  $P_2$  sei Einheitspunkt der imaginären Achse. Alle Punkte sollen im neuen System, das wir in der Folge kurz als  $(P_1, P_2)$ -System bezeichnen wollen, durch entsprechende deutsche Buchstaben beschrieben sein. Dadurch geht (28) über in

$$\mathfrak{z} \bar{\mathfrak{z}} (\mathfrak{z}, \mathfrak{p}_2 - 3i) - \frac{3i}{4} (\mathfrak{z}^2 - \bar{\mathfrak{z}}^2) = 0. \quad (29)$$

Diese zirkuläre Kubik  $f$  geht durch Inversion an dem Einheitskreis um  $P_1 \left( \mathfrak{z} = \frac{1}{\bar{\mathfrak{z}}} \right)$  in die gleichseitige Hyperbel  $f^*$

$$(\mathfrak{z}^*, \mathfrak{p}_2 - 3i) - \frac{3i}{4} (\mathfrak{z}^{*2} - \bar{\mathfrak{z}}^{*2}) = 0 \quad (30)$$

über, die den Ursprung  $P_1$  enthält und deren Asymptoten zur Polkurventangente und Polkurvennormale parallel liegen; ihrer Mitte entspricht die komplexe Zahl  $\mathfrak{z}_M = i + \frac{\bar{\mathfrak{p}}_2}{3}$ . Die Ursprungstangente von  $f^*$  ist zur reellen Asymptote der Scheitel-

<sup>9</sup> L. Burmester: Civiling. (2) 22 (1876); 23 (1877); Lehrbuch der Kinematik, S. 616ff. (1888).

kurve parallel und enthält den dritten Pol der umgekehrten Bewegung ( $\pi_3 = p_3 - 3i$ ). Bei Kenntnis der ersten drei Pole  $P_1, P_2, P_3$  läßt sich somit die gleichseitige Hyperbel  $f^*$  und in weiterer Folge die Scheitelkurve  $f$  leicht konstruieren.

Somit gilt

**Satz 7:** Jene Punkte eines zwangsläufig bewegten ebenen Systems, die augenblicklich einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen, erfüllen eine zirkuläre Kubik („Scheitelkurve“), welche im Momentanpol  $P_1$  einen Doppelpunkt besitzt und dort von der Polkurventangente und Polkurvennormale berührt wird. Ihre Asymptote läuft der Verbindungsgeraden des Momentanpols mit dem 3. Pol der umgekehrten Bewegung  $P_3^*$  parallel.

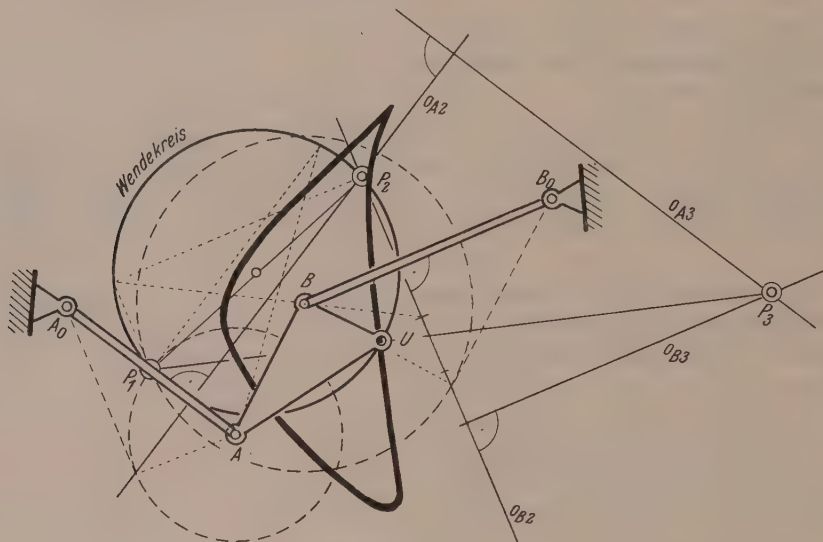


Abb. 6.

Liegt der 3. Pol  $P_3$  auf der Polkurvennormalen, wie dies etwa bei jeder gewöhnlichen Planetenbewegung der Fall ist, so spaltet sich die Scheitelkurve zufolge Nullwerdens der Determinante  $(i, p_3)$  in die Polnormale  $(3, i) = 0$  und einen Kreis  $k_s$

$$(b_3 - 3)(3, 3i) - 3(3, 1) = 0 \dots (p_3 = b_3 i),$$

der die Polkurventangente in  $P_1$  berührt.  $k_s$  liegt zur Geraden  $(1, 3) = 1 - \frac{b_3}{3}$  invers bezüglich des Einheitskreises um  $P_1$ .

Ein Zerfall der Scheitelkurve tritt auch ein, wenn  $P_3$  auf der Poltangentenparallelen  $(1, 3) = 3$  liegt, wenn also  $b_3 = 3$  ist. Es spaltet sich die Scheitelkurve in diesem Fall auf in die Polkurventangente  $(3, 1) = 0$  und einen Kreis  $k_{s1}$

$$a_3(3, 3i) - 3(3, i) = 0 \dots (p_3 = a_3 + 3i),$$

der die Polnormale in  $P_1$  berührt.  $k_{s1}$  liegt zur Geraden  $(3, i) = \frac{a}{3}$  invers bezüglich des Einheitskreises um  $P_1$ . In einem späteren Abschnitt wird gezeigt, daß die Bedingung  $b_3 = 3$  zur Folge hat, daß die Gangpolbahn an der betreffenden Stelle einen doppelt so großen Krümmungsradius besitzt wie die Rastpolbahn. Liegt insbesondere die Umkehr der Ellipsenbewegung vor ( $p_3 = 3i$ ), so tritt ein weiteres Zerfallen der Scheitelkurve in Polkurventangente, Polkurvennormale und Ferngerade ein<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Damit ist der Irrtum über das angebliche Zerfallen der Scheitelkurve bei kongruentsymmetrischer Rollung richtiggestellt. Siehe M. Grubler: Über Kreispunkte einer complan bewegten Ebene. Z. Math. Physik 37, 56 (1892).



### 3. Ballscher Punkt.

Hilfssatz: Wird ein Punkt  $A$  der bewegten Ebene  $\Sigma$  längs einer Geraden geführt, so liegen in jedem Augenblick der Bewegung alle Pole gerader Ordnung auf der Führungsgeraden, alle Pole ungerader Ordnung auf der Bahnnormalen von  $A$ .

Zum Beweis haben wir lediglich in der Bewegungsgleichung (18) die Funktion  $a(\varphi)$  als reell vorauszusetzen. Der in Erweiterung der Formeln (21), (24) und (27) gleich allgemein erklärte Pol  $l$ -ter Ordnung  $P_l$

$$p_l = z + z^{(l)} i^{2-l} = a + a^{(l)} i^{2-l} \quad (31)$$

liegt dann offensichtlich für gerades  $l$  auf der Abszissenachse, für ungerades  $l$  auf der Ordinate durch  $z = a$ .

Sind nun die ersten drei Pole  $P_1, P_2, P_3$  einer Bewegung  $\mathfrak{B}$  für einen bestimmten Augenblick gegeben, so läßt sich stets eine Bewegung  $\mathfrak{B}_1$  mit demselben Poltripel angeben, bei der der Fußpunkt  $U$  des Lotes von  $P_2$  auf  $P_1 P_3$  auf der Geraden  $U P_2$  geführt wird. Legen wir nämlich den Ursprung eines Normalkoordinatensystems derart in den Punkt  $U$ , daß den drei Polen der Reihe nach die Zahlen  $d_1 i, d_2, d_3 i$  entsprechen ( $d_k = \overline{d}_k = \overline{U P_k}$ ), so leistet der Ansatz

$$a(\varphi) = d_1 \varphi + d_2 \frac{\varphi^2}{2!} - d_3 \frac{\varphi^3}{3!} + R$$

bei beliebigem reellen Restglied  $R$  bereits das Gewünschte. Jede der durch (18) mittels dieser Funktion  $a(\varphi)$  beschriebenen Bewegung  $\mathfrak{B}_1$  hat mit  $\mathfrak{B}$  die ersten drei Pole gemeinsam, approximiert also  $\mathfrak{B}$  in dritter Ordnung. Daher muß die Bahn des Punktes  $U$  die Führungsgerade  $U P_2$  für  $\mathfrak{B}_1$  mindestens vierpunktig berühren.  $U$  ist mithin der sogenannte Ballsche Punkt der Bewegung  $\mathfrak{B}$  und gehört naturgemäß sowohl dem Wendekreis, als auch der Scheitelkurve an<sup>11</sup>. Dies gibt

**Satz 8:** Der Ballsche Punkt  $U$  einer Bewegung — Punkt mit mindestens vierpunktig berührender Bahntangente — ergibt sich im Fußpunkt des Lotes aus dem Wendepol  $P_2$  auf die Polgerade  $P_1 P_3$  (Abb. 6 zeigt eine Koppelkurve mit Flachpunkt)<sup>12</sup>.

Liegen die ersten drei Pole, wie z. B. bei der niederen Planetenbewegung auf einer Geraden, so ist der Ballsche Punkt  $U$  mit dem Wendepol  $P_2$  identisch.

## 7. Pol 4. Ordnung, Schmiegekegelschnitt, P-Kurve, Burmester-Punkte.

### 1. Pol 4. Ordnung.

Viermaliges Differenzieren der Bewegungsgleichung (18) nach  $\varphi$  liefert den vierten Ableitungsvektor

$$z^{IV} = a^{IV} + \zeta e^{i\varphi} = a^{IV} + (z - a), \quad (32)$$

der nach Drehung um  $\pi$  an  $z$  angehängt zum vierten Pol  $P_4$  der Bewegung (für den betrachteten Augenblick)

$$z - z^{IV} = a - a^{IV} = p_4 \quad (33)$$

führt.  $P_4$  läßt sich auch durch  $z^{IV} = 0$  kennzeichnen. Es gilt

**Satz 9:** Ist eine Bewegung mittels des Drehwinkelparameters beschrieben, dann fallen die Endpunkte sämtlicher um zwei Rechte geschwenkten und in den Systempunkten  $z$  angehefteten vierten Ableitungsvektoren  $z^{IV}$  im vierten Pol  $P_4$  zusammen.

<sup>11</sup> R. Ball: Notes on applied mechanics. Dublin Proc. (2) 1, 243 (1871).

<sup>12</sup> R. Müller: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Z. Math. Physik 42, 251, 259 (1897).

## 2. Schmiegekegelschnitt.

Für jeden Systempunkt erhält man mittels (13) den Mittelpunkt  $M$  des Schmiegekegelschnittes seiner Bahn. Setzt man für  $\delta$ ,  $\delta'$  die entsprechenden Werte (9) ein, so erhält man

$$\mu = z + \frac{3(z', z'') [3(z', z'') z'' - (z' z''') z']}{12(z', z'')(z'', z''') + 3(z', z'')(z', z^{IV}) - 5(z', z''')^2}.$$

Da durch Zentrum  $M$  und Krümmungskreis samt Berührungspunkt ein Kegelschnitt eindeutig festgelegt ist und zur Ermittlung von  $M$  nach (34) die ersten vier Ableitungsvektoren ausreichen, diese aber wieder durch Angabe der ersten vier Pole für jeden Systempunkt bestimmt sind, gilt

**Satz 10:** Haben zwei Bewegungen  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  in einem bestimmten Augenblick die ersten vier Pole gemeinsam, so berühren einander die Bahnkurven jedes Systempunktes von 4. Ordnung, haben also gemeinsame Schmiegekegelschnitte<sup>13</sup>.

Wir sagen,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stimmen in 4. Ordnung überein.  $P_1, P_2, P_3, P_4$  können daher als Äquivalent für fünf benachbarte Lagen der bewegten Ebene angesehen werden.

## 3. Ruhende Schmiegeparabel, $P$ -Kurve.

Ist der die Bahnkurve fünfpunktig berührende Schmiegekegelschnitt eine Parabel („ruhende Schmiegeparabel“), so muß der Nenner in (34) verschwinden, also

$$3(z', z'') [(z', z^{IV}) + 4(z'', z''')] - 5(z', z''')^2 = 0 \quad (35)$$

sein. Beim Übergang zum  $(P_1, P_2)$ -System (vgl. Abschnitt 6, 2) erhalten wir aus (35) die Bedingungsgleichung für eine ruhende Schmiegeparabel

$$3 \left[ \bar{z} \bar{z} + \frac{i}{2} (\bar{z} - \bar{z}) \right] [3 \bar{z} \bar{z} + (z, 4 - 4 p_3 i + p_4 i) + 4(1, p_3)] - 5(\bar{z}, p_3)^2 = 0. \quad (36)$$

Diese bizirkuläre Quartik soll „ $P$ -Kurve“ heißen. Sie berührt die Gangpolbahn im Momentanpol  $P_1$ , die Ballsche Kurve im Ballschen Punkt  $U$  und ist im allgemeinen vom Geschlecht 1. Somit gilt:

**Satz 11:** Jene Punkte eines ebenen, zwangsläufig bewegten Systems, die augenblicklich Stellen mit „ruhender Bahnschmiegeparabel“ durchlaufen, erfüllen eine bizirkuläre Quartik („ $P$ -Kurve“), welche die Gangpolkurve im Momentanpol, die Ballsche Kurve im Ballschen Punkt berührt; sie ist im allgemeinen vom Geschlecht 1.

Beispiel:  $P$ -Kurve der Zykloidenbewegung. Rollt ein Kreis auf einer Geraden, so folgt aus der zugehörigen Bewegungsgleichung  $z = -r\varphi + \zeta e^{i\varphi}$ , daß alle höheren Pole von  $P_2$  angefangen im Mittelpunkt des rollenden Kreises liegen. Setzt man folglich in (36)  $p_3 = p_4 = i$ , so erhält man als Gleichung der  $P$ -Kurve im  $(P_1, P_2)$ -System für diesen speziellen Fall

$$3 \left[ \bar{z} \bar{z} + \frac{i}{2} (\bar{z} - \bar{z}) \right] \left[ 3 \bar{z} \bar{z} + \frac{7i}{2} (\bar{z} - \bar{z}) + 4 \right] - \frac{5}{4} (\bar{z} + \bar{z})^2 = 0.$$

Die  $P$ -Kurve der Zykloidenbewegung ist mithin eine zur Polkurvennormalen symmetrische rationale bizirkuläre Quartik, die im Wendepol  $P_2$  (hier identisch mit der Mitte des rollenden Kreises) einen isolierten Punkt besitzt und daher rational ist.

<sup>13</sup> Die in der Getriebetechnik wichtige Aufgabe, eine Bahnkurve durch eine andere, sich gut anschmiegende und kinematisch leicht erzeugbare zu ersetzen, wurde schon des öftern untersucht und führte R. Beyer zur Betrachtung von Kegelschnitten, die eine gegebene Bahnkurve in einem bestimmten Punkt in vier, fünf und mehr zusammengedrängten Punkten berühren. Siehe R. Beyer: Schmiegekegelschnitte und ihre Anwendung in der praktischen Analysis und Kinematik. Z. angew. Math. Mech. 16, 345 (1936); Anwendung von Schmiegekegelschnitten in der Getriebetechnik. Masch.-Bau Betrieb, RM—AfG 17, 253 (1938).

Sie geht aus der Ellipse  $5\eta^2 + 3\eta^2 - 6\eta = 0$  durch Inversion am Einheitskreis um  $P_2$  hervor. Ihr symmetrischer Scheitel  $S_P$  ( $\zeta = 4\frac{i}{3}$ ) besitzt sogar eine sechspunktig berührende Bahnschmiegeparabel (Abb. 7).

#### 4. Burmester-Punkte.

Die im Ablauf der Bewegung auftretenden Scheitelkurven  $f$  besitzen in der bewegten Ebene  $\Sigma$  eine Einhüllende, die aus der Gangpolkurve und einer weiteren Hüllkurve  $f_h$  besteht. Da eine infinitesimale Veränderung der Scheitelkurve  $f$  im Sinne der vorliegenden Bewegung den Doppelpunkt in der Richtung der Polkurventangente verschiebt, hat

$f$  mit der „Nachbarkurve“ außer den absoluten Kreispunkten und dem dreifach zählenden Momentanpol  $P_1$  noch vier eigentliche Schnittpunkte gemein, die die Berührungspunkte von  $f$  mit  $f_h$  darstellen. Diese Punkte  $B_i$ , die man Burmester-Punkte<sup>14</sup> nennt, durchlaufen in dem betrachteten Augenblick Bahnstellen mit fünfpunktig berührenden Krümmungskreisen.

Rechnerisch erhält man diese Punkte im Schnitt der Scheitelkurve  $f$  mit der  $\varphi$ -Derivierten  $f'$ , die sich ebenfalls als zirkuläre Kubik erweist. Dies gibt

**Satz 12:** In jedem Augenblick einer Bewegung gibt es vier Punkte  $B_i$ , deren Bahnkurven einen fünfpunktig berührenden Krümmungskreis besitzen. Sie gehören der Scheitelkurve  $f$  und jener zirkulären Kubik  $f'$  an, die man durch Differentiation nach  $\varphi$  gewinnt. Die Hüllkurve der Scheitelkurven in  $\Sigma$  besteht aus der Gangpolbahn und der Burmester-Kurve<sup>14</sup>, (= Ort der Burmester-Punkte in  $\Sigma$ ).

Liegt ein Burmester-Punkt in einem symmetrischen Scheitel, so muß die Berührung zwischen Bahnkurve und Krümmungskreis von ungerader Ordnung sein. Der Krümmungskreis berührt an diesen Stellen mindestens sechspunktig. Eine solche Stelle wollen wir einen sextaktischen Scheitel nennen.

**Beispiel:** Burmester-Punkte der Zykloidenbewegung. Die Scheitelkurve  $f$  zerfällt bei der Zykloidenbewegung in die Polkurvennormale und in den Kreis  $\eta^2 + \eta^2 - 3\eta = 0$  (vgl. Abschnitt 6, 2). Die Differentiation von (28) nach  $\varphi$  liefert in unserem Sonderfall als Gleichung für  $f'$  im  $(P_1, P_2)$ -System

$$[2\zeta\bar{\zeta} + i(\zeta - \bar{\zeta})][4 + 3i(\zeta - \bar{\zeta})] = 0,$$

besteht mithin aus der Polkurventangentenparallelen  $2\eta - 3 = 0$  und dem Kreis  $\eta^2 + \eta^2 - \eta = 0$ . Ein Burmester-Punkt fällt somit in die Mitte des rollenden Kreises, während die restlichen drei in den zweiten Doppelpunkt  $S_k$  ( $\zeta = 3\frac{i}{2}$ ) der Scheitelkurve rücken.  $S_k$  ist mithin ein sextaktischer Scheitel seiner Bahn ( $\varrho = 4\frac{1}{2}$ ).

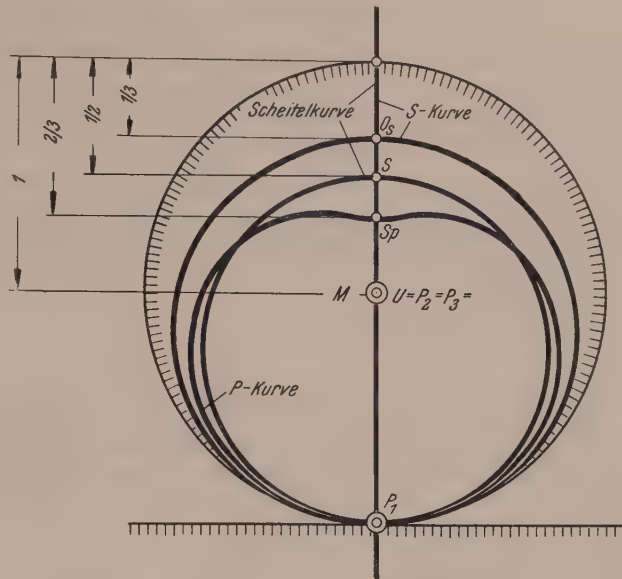


Abb. 7.

<sup>14</sup> Siehe Anm. 9.



## 8. Pol 5. Ordnung, sextaktische Punkte, S-Kurve, Punkte mit sextaktischen Bahnschmiegeparabeln.

### 1. Pol 5. Ordnung.

Der fünfte Ableitungsvektor

$$z^V = a^V + \zeta i e^{i\varphi} = a^V + i(z - a) \quad (37)$$

führt nach Drehung um  $\pi/2$  und im Systempunkt  $z$  befestigt zum fünften Pol  $P_5$  der Bewegung (für den betrachteten Augenblick)

$$z + z^V i = a + a^V i = p_5; \quad (38)$$

für  $P_5$  verschwindet  $z^V$ .

### 2. Sextaktische Punkte, S-Kurve.

Ist für einen Systempunkt  $z$  der Mittelpunkt des Bahn-Schmiegekegelschnittes stationär, so berührt der Schmiegkegelschnitt sechspunktig („ruhender Schmiegkegelschnitt“). Die Bedingungsgleichung (16) für einen solchen sextaktischen Punkt lautet im  $(P_1, P_2)$ -System

$$\begin{aligned} &[(\zeta, \zeta i) + (\zeta, 1)]^2 [(\zeta, -5i + 5p_4 - p_5) + 5(p_4, i)] - \\ &- 5(\zeta, p_3) \left\{ [(\zeta, \zeta i) + (\zeta, 1)] [(\zeta, \zeta i) + (\zeta, 2 - p_3 i + p_4 i) + 2(1, p_3)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{9} (\zeta, p_3)^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Diese bizirkuläre Quintik wollen wir „S-Kurve“ nennen. Sie wird vom Wendekreis in den Doppelpunkten  $P_1$  und  $U$  berührt und besitzt keine weiteren Punktsingularitäten. Somit gilt

**Satz 13:** Jene Punkte eines ebenen, zwangsläufig bewegten Systems, die augenblicklich Stellen mit „ruhendem Bahnschmiegekegelschnitt“ durchlaufen, erfüllen eine bizirkuläre Quintik („S-Kurve“), die die Gangpolkurve im Momentanpol und die Ballsche Kurve im Ballschen Punkt berührt. Diese zwei Punkte  $P_1$  und  $U$  sind die endlichen Doppelpunkte der S-Kurve, die im allgemeinen vom Geschlecht 2 ist.

**Beispiel:** S-Kurve der Zykloidenbewegung. Setzt man in (39)  $p_3 = p_4 = i$ , so erhält man nach Abspaltung der Polkurvennormalen als Gleichung der S-Kurve im  $(P_1, P_2)$ -System

$$3 \zeta^2 \bar{\zeta}^2 + 11 (\zeta, 1) \zeta \bar{\zeta} + 5 \zeta \bar{\zeta} - \frac{20}{9} (\zeta, i)^2 + 8 (\zeta, 1)^2 + 5 (\zeta, 1) = 0. \quad (40)$$

Die S-Kurve der Zykloidenbewegung besteht mithin aus der Polkurvennormalen und einer zu ihr symmetrischen, bizirkulären Quartik, die im Wendepol  $P_2 = U$  einen isolierten Punkt besitzt und daher rational ist. Sie geht aus der Ellipse  $20 \eta^2 + 18 \eta^2 - 45 \eta = 0$  durch Inversion am Einheitskreis um  $P_2$  hervor. Ihr symmetrischer Scheitel  $O_5 \left( \zeta = \frac{5i}{3} \right)$  besitzt sogar einen achtpunktig berührenden Bahnkegelschnitt<sup>15</sup> (Abb. 7).

<sup>15</sup> C. Rodenberg hat in rein abzählender Weise als Ort aller sextaktischen Punkte für einen bestimmten Augenblick einer Bewegung eine Kurve achter Ordnung angegeben. Das Abspalten der dreifach zu zählenden Ferngeraden ist bei Rodenbergs Betrachtungsweise nicht in Erscheinung getreten; ebensowenig das weitere Zerfallen der S-Kurve, wenn die ersten fünf Pole der Bewegung in einer Geraden liegen. Siehe C. Rodenberg: Über die während der Bewegung projektiv veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Kurven und Flächen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 8, 176–191 (1888).

### 3. Punkte mit sextaktischer Bahnschmiegeparabel.

Die im Ablauf einer Bewegung auftretenden  $P$ -Kurven  $p$  besitzen in der bewegten Ebene  $\Sigma$  eine Einhüllende, die zufolge Satz 11 aus der Gangpolkurve, der Ballschen Kurve und einer weiteren Hüllkurve  $p_h$  besteht. Bei einer infinitesimalen Veränderung der  $P$ -Kurve im Sinne der vorliegenden Bewegung hat  $p$  mit der „Nachbarkurve“ außer den vierfach zu zählenden absoluten Kreispunkten, dem Momentanpol und dem Ballschen Punkt noch sechs eigentliche Schnittpunkte gemein, die die Berührungspunkte von  $p$  mit  $p_h$  darstellen. Diese Punkte  $Q_i$  durchlaufen in dem betrachteten Augenblick Bahnstellen mit sechspunktig berührender Bahnschmiegeparabel. Rechnerisch erhält man diese Punkte aus der Gleichung der  $P$ -Kurve und ihrer  $\varphi$ -Derivierten. Dies gibt

**Satz 14:** In jedem Augenblick einer Bewegung gibt es sechs Punkte, deren Bahnkurven eine sextaktische Bahnschmiegeparabel besitzen. Sie gehören der  $P$ -Kurve und ihrer  $\varphi$ -Derivierten an. Die Hüllkurve der  $P$ -Kurve in  $\Sigma$  besteht aus der Gangpolkurve, der Ballschen Kurve und dem Ort der Punkte mit sextaktischer Bahnschmiegeparabel.

Beispiel: Punkte mit sextaktischer Bahnschmiegeparabel bei der Zykloidenbewegung. Nach Abschnitt 7, 3 ist die  $P$ -Kurve der Zykloidenbewegung eine zur Polkurvennormalen symmetrische, rationale bizirkuläre Quartik, die die Gangpolkurve im Momentanpol berührt und im Wendepol  $P_2$  einen isolierten Punkt besitzt. Eine infinitesimale Veränderung im Sinne der Bewegung bedeutet hier eine infinitesimale Drehung um  $P_2$ . Die  $P$ -Kurve hat folglich mit ihrer „Nachbarkurve“ außer den vierfach zu zählenden absoluten Kreispunkten, der ebenfalls vierfach zu zählenden Kreismitte und dem Momentanpol  $P_1$  noch drei eigentliche Punkte  $Q_i$  gemein, von denen nur einer reell ist. Dieser fällt in den bereits erwähnten symmetrischen Scheitel  $S_P$  ( $\zeta = \frac{4i}{3}$ ). Die beiden konjugiert komplexen Punkte  $Q_i$  haben die reelle Trägergerade  $3(\zeta - \bar{\zeta}) + 4i = 0$ .

### 9. Septaktische und oktaktische Punkte.

Die im Ablauf einer Bewegung auftretenden  $S$ -Kurven  $s$  besitzen in der bewegten Ebene  $\Sigma$  eine Einhüllende, die aus der Gangpolkurve, der Ballschen Kurve und einer weiteren Hüllkurve  $s_h$  besteht. Eine infinitesimale Veränderung im Sinne der vorliegenden Bewegung verschiebt die Doppelpunkte  $P_1$  und  $U$  in der Richtung je einer Tangente von  $s$ . Demnach hat  $s$  mit der „Nachbarkurve“ außer den je vierfach zu zählenden absoluten Kreispunkten und den je dreifach zu zählenden Punkten  $P_1$  und  $U$  noch elf eigentliche Schnittpunkte gemein, die die Berührungspunkte von  $s$  mit  $s_h$  darstellen. Diese elf Punkte  $S_i$  durchlaufen in dem betrachteten Augenblick Bahnstellen mit siebenpunktig berührenden Bahnschmiegekegelschnitten, sollen also „septaktische“ Punkte heißen. Rechnerisch erhält man diese Punkte aus der Gleichung der  $S$ -Kurve und ihrer  $\varphi$ -Derivierten.

**Satz 15:** In jedem Augenblick einer Bewegung gibt es elf Punkte  $S_i$ , deren Bahnkurven einen septaktischen Schmiegekegelschnitt besitzen. Sie gehören der  $S$ -Kurve und ihrer  $\varphi$ -Derivierten an. Die Hüllkurve der  $S$ -Kurve in  $\Sigma$  besteht aus der Gangpolkurve, der Ballschen Kurve und dem Ort der Punkte mit septaktischen Bahnschmiegekegelschnitten.

Liegt ein septaktischer Punkt in einem symmetrischen Scheitel, so ist die Berührung zwischen Bahnkurve und Schmiegekegelschnitt von ungerader Ordnung. Der Bahnschmiegekegelschnitt berührt an einer solchen Stelle daher mindest achtpunktig (oktaktischer Punkt).

Beispiel: Nach Abschnitt 8, 2 besitzt die  $S$ -Kurve der Zykloidenbewegung einen dreifachen Punkt im Mittelpunkt des rollenden Kreises und vier Doppelpunkte (im Momentanpol  $P_1$ , im symmetrischen Scheitel  $O_s$  und in den absoluten Kreispunkten). Eine infinitesimale Drehung um die Kreismitte läßt diese und die absoluten Kreispunkte fest. Die  $S$ -Kurve hat daher mit ihrer „Nachbarkurve“ außer den vierfach zu zählenden absoluten Kreispunkten, der neunfach zu zählenden Kreismitte und dem dreifach zu zählenden Momentanpol noch fünf eigentliche Schnittpunkte, von denen drei in dem symmetrischen Scheitel  $O_s$  fallen, und zwei konjugiert komplex sind. Die reelle Trägergerade der komplexen Punkte hat die Gleichung

$$3(\zeta - \bar{\zeta}) - 16i = 0.$$

$O_s$  ist ein oktaktischer Punkt seiner Bahn.

### 10. Polkette.

Der  $n$ -Ableitungsvektor

$$z^{(n)} = a^{(n)} + \zeta i^n e^{i\varphi} = a^{(n)} + (z - a) i^n \quad (41)$$

führt, nach Drehung um  $(2 - n) \frac{\pi}{2}$  an  $z$  angehängt, zum  $n$ -ten Pol  $P_n$  der Bewegung (für den betrachteten Augenblick)

$$z + z^{(n)} i^{2-n} = a + a^{(n)} i^{2-n} = p_n; \quad (42)$$

dieser ist auch durch  $z^{(n)} = 0$  gekennzeichnet. Es gilt mithin allgemein

**Satz 16:** Ist eine Bewegung mittels des Drehwinkelparameters beschrieben, so fallen die Endpunkte sämtlicher um  $2 - n$  Rechte geschwenkten und in ihren Systempunkten  $z$  angehefteten  $n$ -ten Ableitungsvektoren  $z^{(n)}$  im  $n$ -ten Pol  $P_n$  zusammen.

Die Gesamtheit aller Pole einer analytischen Bewegung für einen bestimmten Augenblick nennen wir die zugehörige „Polkette“. Die beiden ersten (regulären) Glieder der Polkette haben wir bereits als Momentanpol und Wendepol erkannt. Um eine geometrische Deutung der höheren Pole zu erhalten, wählen wir in Anlehnung an Abschnitt 5, 3 in der festen Ebene  $\Sigma_0$  eine Gerade  $g_0$  und fragen nach ihrer Hüllbahn  $h$  in  $\Sigma$ .  $g_0$  sei in dem der Ebene  $\Sigma_0$  aufgeprägten  $z$ -System durch den richtungsanzeigenden Einsvektor  $E = e^{i\varphi}$  und durch ihren orientierten Ursprungsabstand  $p$  festgelegt;  $p$  soll positiv sein, wenn die im Sinne von  $E$  gerichtete Gerade im positiven Sinn um den Nullpunkt  $A_0$  dreht. Dann lautet die Gleichung von  $g_0$  im festen System  $(z + E i p, E) = 0$  oder

$$\bar{E} z - E \bar{z} + 2 p i = 0,$$

und zufolge (18) im bewegten System

$$\bar{E} \zeta e^{i\varphi} - E \bar{\zeta} e^{-i\varphi} + 2 p i + a \bar{E} - \bar{a} E = 0. \quad (43)$$

Ableitung nach  $\varphi$  führt auf die Gleichung einer Geraden  $g_0' \perp g_0$

$$\bar{E}' \zeta e^{i\varphi} + E \bar{\zeta}' e^{-i\varphi} - i (\bar{E} a' - E \bar{a}') = 0; \quad (44)$$

$g_0'$  ist offenbar die Normale der Hüllbahn  $h$  von  $g_0$  und enthält den 1. Pol  $P_1$ . Neuerliche Differentiation liefert eine Gerade  $g_0''$ , die Normale der von  $g_0'$  umhüllten 1. Evolute von  $h$ ; sie enthält den 1. Krümmungsmittelpunkt von  $h$  und den 2. Pol  $P_2$ . Ständig fortfahrend gelangen wir schließlich zur Geraden  $g_0^{(n)}$

$$\bar{E} \zeta e^{i\varphi} - (-1)^n E \bar{\zeta} e^{-i\varphi} + i^{3n} (E \bar{a}^{(n)} - \bar{E} a^{(n)}) = 0;$$

sie ist parallel oder normal zu  $g_0$ , Normale der  $(n - 1)$ -ten Evolute von  $h$  — trägt



also das  $n$ -te Krümmungszentrum von  $h$  — und geht durch den  $n$ -ten Pol  $P_n$ , der auf diese Weise eine geometrische Deutung erfährt.

Hieraus geht überdies hervor, daß die Polkette  $P_1, P_2, P_3, \dots$  vom Koordinatensystem unabhängig und mit der von R. Müller betrachteten Kette der Wendepole identisch ist<sup>16</sup>. Eine analytische Bewegung  $\mathfrak{B}$  ist durch Angabe der Polkette vollständig bestimmt.

Berechnet man auf die gleiche Art aus (19) die Polkette der umgekehrten Bewegung  $\mathfrak{B}^*$  (wobei zu beachten ist, daß nun  $z$  eine feste,  $\zeta$  hingegen eine veränderliche Größe darstellt), so erhält man die Polkette  $P_n^*$

$$p_n^* = \sum_0^n \binom{n}{k} a^k i^k. \quad (45)$$

Zwischen den Polketten von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}^*$  besteht die einfache involutorische Beziehung

$$p_n^* = \sum_1^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} p_k, \quad (46)$$

die man aus (42) und (45) unter Beachtung der Identität  $\sum_1^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1$  leicht errechnet.

Die Poltripel  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_1^*, P_2^*, P_3^*$  bilden eine feste Konfiguration. zufolge (46) gilt nämlich

$$(p_2 - p_2^*) : (p_3 - p_3^*) = 2 : 3, \quad (47)$$

das heißt die Pole  $P_2, P_2^*, P_3, P_3^*$  bilden ein Trapez, dessen Parallelseiten das Längenverhältnis 2 : 3 aufweisen;  $P_1 = P_1^*$  liegt in der Mitte der kürzeren Parallelseite  $P_2 P_2^*$  (vgl. Abschnitt 5).

Beispiel: Polkette der niederen Planetenbewegung (Kreisrollung). Bewegungsgleichung:

$$z = a e^{i\lambda\varphi} + \zeta e^{i\varphi};$$

Polkette:

$$p_n = a (1 - \lambda^n) e^{i\lambda\varphi}.$$

Sämtliche Pole liegen in der Polkurvennormalen, und zwar derart, daß die Abstände vom Rollkreismittelpunkt  $A$  eine geometrische Reihe bilden. Insbesondere ist der Wendepol  $P_2$  invers zur Fixkreismitte bezüglich des Rollkreises.

Sonderfall: Ellipsenbewegung ( $\lambda = -1$ ). Die Pole fallen abwechselnd mit dem Wälzpunkt und dem Fixkreiszentrum zusammen.

1. Grenzfall: Kreisevolventenbewegung. Bewegungsgleichung:

$$z = r (i + \varphi) e^{i\varphi} + \zeta e^{i\varphi};$$

Polkette:

$$p_n = n r i e^{i\varphi}.$$

Die Polabstände vom Kreismittelpunkt bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz  $r$ .

2. Grenzfall: Zykloidenbewegung. Bewegungsgleichung:

$$z = -r\varphi + \zeta e^{i\varphi};$$

Polkette:

$$p_1 = -r(\varphi + i), \quad p_n = -r\varphi \quad \text{für } n > 1.$$

Von  $P_2$  an liegen alle Pole im Mittelpunkt des rollenden Kreises.

<sup>16</sup> R. Müller: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Z. Math. Physik **42**, 250 (1897).

## 11. Polkurven.

Die Gesamtheit aller Lagen, die der  $m$ -te Pol  $P_m$  beim Ablauf der Bewegung  $\mathfrak{B}$  im festen System  $\Sigma_0$  einnimmt, heiße die „ $m$ -te Rastpolkurve“  $c_0^m$ , die im bewegten System  $\Sigma$  die „ $m$ -te Gangpolkurve“  $c^m$ . Bei der Umkehr der Bewegung vertauschen  $c_0^m$  und  $c^m$  ihre Bedeutung.

$c_0^m$  ist nach (42) durch  $p_m = a + i^{2-m} a^{(m)}$  beschrieben. Ihr  $n$ -ter Ableitungsvektor lautet daher

$$p_m^{(n)} = a^{(n)} + i^{2-m} a^{(m+n)} \quad (48)$$

oder zufolge (42)

$$p_m^{(n)} = i^n (p_{m+n} - p_n). \quad (49)$$

Somit gilt

**Satz 17:** Kennt man die ersten  $n$  Pole einer zwangsläufigen ebenen Bewegung, so lassen sich für das  $m$ -te Polkurvenpaar die ersten  $n - m$  Ableitungsvektoren durch elementare Operationen ermitteln, wenn nur  $n > m$ .

Damit lassen sich gemäß Abschnitt 2 alle differentialgeometrischen Fragen über Tangenten, Krümmungskreise, Schmiegeparabeln, Schmiegekegelschnitte usw. der Polkurven auf einfache Weise lösen.

Für die ersten Polkurven

$$p_1 = a + a' i \dots \pi_1 = (p_1 - a) e^{-i\varphi} = a' i e^{-i\varphi}$$

ergibt sich die bekannte geometrische Bedeutung als Rollkurvenpaar: Da nämlich die ersten Ableitungsvektoren

$$p_1' = a' + a'' i \dots \pi_1' = (a' + a'' i) e^{-i\varphi} = p_1' e^{-i\varphi}$$

nicht nur gleiche Richtung, sondern auch gleichen Absolutbetrag aufweisen, die Pole mithin in beiden Ebenen mit gleicher Geschwindigkeit ( $\varphi$  wieder als Zeit gedeutet) ihre Lage ändern (Polwechselgeschwindigkeit), so kann man die Bewegung  $\mathfrak{B}$  durch Abrollen der Gangpolkurve auf der Rastpolkurve erzeugen.

**Beispiel 1:** Polkurvenkrmmungskonstruktion. Die beiden ersten Ableitungsvektoren der Rastpolkurve sind bei vorliegendem Poltrapez leicht zu finden, ist doch zufolge (49)

$$p_1' = i (p_2 - p_1) \dots p_1'' = - (p_3 - p_2).$$

Daher kann man unter Berücksichtigung von Satz 1 Krümmungskreise von Rast- und Gangpolbahn folgendermaßen finden: Man teilt die längere Seite  $P_3 P_3^*$  des Poltrapezes durch die Punkte  $D, D^*$  in drei gleiche Teile ( $\overline{P_3 D} = \overline{D D^*} = \overline{D^* P_3^*}$ ). Die Krmmungszentren  $K, K^*$  der beiden Polkurven liegen dann auf den Antipolaren der Punkte  $D$  bzw.  $D^*$  bezüglich des Kreises über dem Durchmesser  $P_2 P_2^*$ .

1. Sonderfall: Krmmungskreiskonstruktion der ersten Polkurven des zentrischen Schubkurbelgetriebes in einer Totlage. Abb. 8 zeigt eine Totlage der Geradschubkurbel  $A_0 A B$ . Nach dem Hilfssatz Abschnitt 6, 3 müssen die Pole abwechselnd auf der Fhrungsgeraden und auf der Bahnnormalen des Schiebers  $B$  liegen. Da aber die symmetrische Stellung des Mechanismus die gesamte Polkette in die Führungsgerade zwingt, liegen alle Pole ungerader Ordnung in  $B$ . Der Wendepol  $P_2$  ist invers zum Lager  $A_0$  bezüglich des Kreises um das Kurbelende  $A$ , der den Momentanpol  $P_1 = B$  enthält (vgl. Abschnitt 6, 2, Beispiel). Ergänzt man in der Figur das hier ausgeartete Poltrapez, so erkennt man im Wendekreis den Scheitelkrmmungskreis (vierpunktige Berührung) der Gangpolkurve; die Krmmungsmittle der Rastpolkurve fällt in den Wendepol  $P_2$ . Bezeichnet  $a$  die

Kurbel- und  $k$  die Koppellänge, so gilt mithin für die Krümmungsradien der ersten Polkurven in den Totlagen

$$\varrho = k \pm \frac{k^2}{a} \dots \varrho^* = \frac{1}{2} \left( k \pm \frac{k^2}{a} \right)^{-17}$$

2. Sonderfall: Krümmungskreise der beiden ersten Polkurven, wenn  $P_3$  auf einer Polkurventangentenparallelen im Abstand drei liegt. Die zu Ende Abschnitt 6, 2 erwähnte Tatsache, daß bei genannter spezieller Lage von  $P_3$  die Krümmungsverhältnisse 2:1 von Rast- und Gangpolbahn stehen, ist nach Gesagtem selbstverständlich.

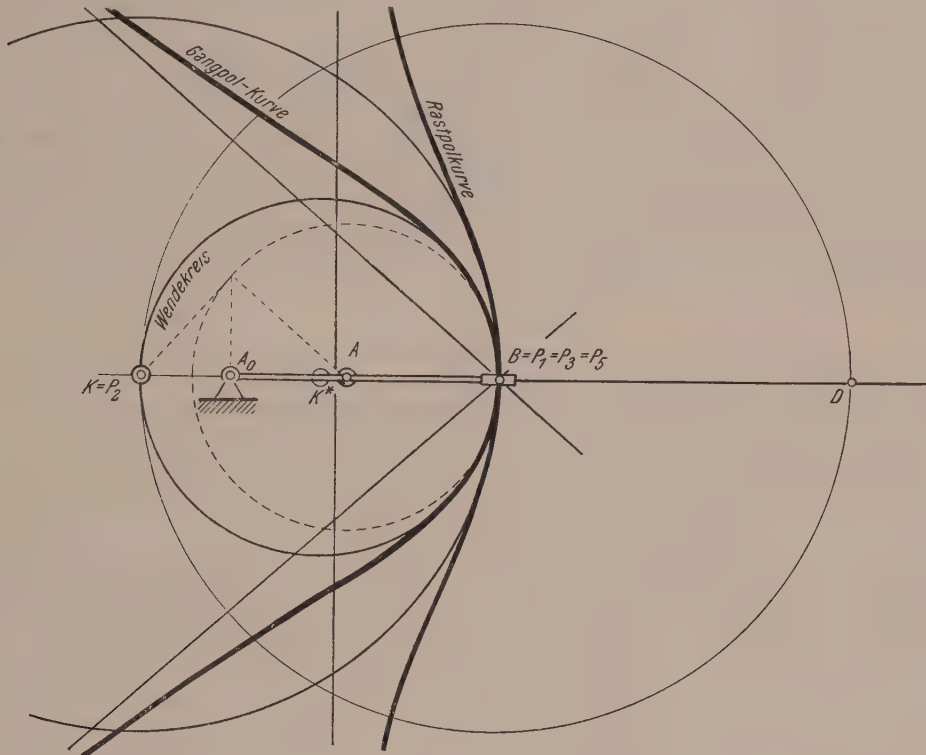


Abb. 8.

Beispiel 2: Schmiegekegelschnitte der ersten Polkurven des zentrischen Schubkurbelgetriebes in den Totlagen.  $A$  beschreibt einen Kreis um  $A_0$  mit der Kurbellänge  $a$  als Radius.  $A_0$  ist mithin Mittelpunkt des Bahnschmiegekegelschnittes von  $A$ , so daß nach (34) der 4. Ableitungsvektor der Bahn von  $A$  und damit die Lage des 4. Poles  $P_4$  zu finden ist. Die Rechnung liefert für die Entfernung  $\overline{P_1 P_4} = k + 4 \frac{k^2}{a} - 3 \frac{k^4}{a^3}$  (positive Richtung von  $P_1$  nach  $P_2$  gezählt). Nun sind (da  $P_5 = P_1$ ) die ersten fünf Pole bekannt, so daß eine abermalige Anwendung von (34)

<sup>17</sup> Eine Ellipsenbewegung, für die der Momentanpol in dem betrachteten Augenblick nach  $B$  fällt und der Punkt  $A$  eine den Kurbelkreis hyperoskulierende Ellipse liefert, approximiert die vorliegende Schubkurbelbewegung in 3. Ordnung; beide Bewegungen müssen demnach die ersten drei Pole gemein haben. Daraus erklärt sich die oben beschriebene Lage von  $P_1, P_2, P_3$  und das Größenverhältnis 2:1 der Krümmungskreise von Rast- und Gangpolkurve in anschaulicher Weise. Da sich die genannte Ellipse aus Scheitelkrümmungsradius  $a$  und Nebenhalbachse  $k$  leicht konstruieren läßt, sind die Polkurvenkrümmungen auch auf diesem Wege leicht zu ermitteln.



die Mittelpunkte  $M, M^*$  der Schmiegekegelschnitte von Rast- und Gangpolbahn liefert, die jetzt durch Scheitel samt Scheitelkrümmungskreis und Mittelpunkt einfach zu konstruieren sind.  $M$  liegt in diesem Sonderfall invers zu  $P_4$  bezüglich des Kreises  $(P_1; \overline{P_1 P_2})$ . Analoges gilt für  $M^*$ .

## 12. Bewegungsapproximation.

Zusammenfassend können wir sagen: Haben zwei Bewegungen  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  in einem bestimmten Augenblick die ersten  $n$  Pole gemeinsam, so berühren einander alle Bahnkurven von  $n$ -ter Ordnung ( $n+1$ -punktig). Wir sagen,  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  stimmen in  $n$ -ter Ordnung überein. Soll daher eine vorgegebene Bewegung in einem bestimmten Augenblick durch eine andere in  $n$ -ter Ordnung approximiert werden, so müssen die Polketten der beiden Bewegungen in ihren ersten  $n$  Gliedern übereinstimmen. Man kann zu einer solchen Approximation mit vorgeschriebener Genauigkeit jede Bewegung heranziehen, deren ersten  $n$  Pole voneinander unabhängig sind. Als besonders vorteilhaft zufolge ihrer leichten Handhabung und der Möglichkeit einer technischen Verwirklichung erweisen sich dabei die höheren Planetenbewegungen. Aus der Bewegungsgleichung einer  $n$ -stufigen Planetenbewegung

$$z = \sum_k^{n-1} a_k e^{i\lambda_k \varphi} + \zeta e^{i\varphi}, \quad (50)$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k \neq \lambda_l \neq 1$$

ergeben sich die ersten  $n$  Glieder der Polkette mit

$$p_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (1 - \lambda_k^j) \dots j = 1, 2 \dots n. \quad (51)$$

Bei gegebenen  $p_j$  und nach willkürlicher Wahl der  $\lambda_k$  stellt (51) ein System von  $n$  linearen Gleichungen für die Unbekannten  $a_k$  dar. Die Determinante des Systems

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 - \lambda_1 & \dots & 1 - \lambda_{n-1} \\ 1 & 1 - \lambda_1^2 & \dots & 1 - \lambda_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 - \lambda_1^n & \dots & 1 - \lambda_{n-1}^n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

ist eine Vandermondsche Determinante und daher unter den getroffenen Voraussetzungen sicher von Null verschieden, so daß durch das Gleichungssystem (58) die komplexen Zahlen  $a_k$ , die als Vektoren aufgefaßt, die Anfangslagen der Glieder des erzeugenden Gelenkpolygons darstellen, eindeutig bestimmt sind. Wählt man die Verhältnisse  $\lambda_k$  und damit die Geschwindigkeitsverhältnisse der einzelnen Stäbe rational, so kann die approximierende Planetenbewegung durch ein Zahngetriebe verwirklicht werden.

Jede analytische zwangsläufige Bewegung in der Ebene läßt sich mithin — jeweils noch auf mannigfache Weise — durch Planetenbewegungen  $n$ -ter Stufe in  $n$ -ter Ordnung approximieren, derart, daß ihre sämtlichen Bahnkurven von den Bahnen der Ersatzbewegung (Radlinien  $n$ -ter Stufe)  $(n+1)$ -punktig berührt werden<sup>18</sup>.

<sup>18</sup> W. Wunderlich weist in einer zweiten Arbeit „Höhere Radlinien als Näherungskurven“, Österr. Ing.-Arch. 4, H. 1 (1950), auf die Möglichkeit hin, beliebige, auch nicht analytische ebene Einzelkurven durch höhere Radlinien beliebig genau zu approximieren. Hierbei liegt offensichtlich eine etwas andere Problemstellung vor.

(Eingegangen am 13. März 1951.)

## Die Stabilität der Schwingungen in zwei hintereinander liegenden Wasserschlössern.

Von

Walter Jurecka, Kaprun, Österreich.

Mit 2 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Ausgehend von den bekannten dynamischen Grundgleichungen des schwingungsfähigen Systems und den beiden Kontinuitätsgleichungen, wird unter Verwendung der Regulierungsgleichung für den Fall der Regelung auf konstante Leistung eine nichtlineare und nichthomogene Differentialgleichung 4. Ordnung abgeleitet, die den Schwingungsvorgang vollständig beschreibt. Für den Fall kleiner Schwingungen geht diese Differentialgleichung in eine lineare und homogene Form über. Bei großen Schwingungen wird nur der Fall plötzlicher Öffnung betrachtet und die Differentialgleichung in eine solche mit schwach veränderlichen Koeffizienten übergeführt. Annahmen über die möglichen maximalen Schwingungsausschläge führen wieder auf die lineare und homogene Form. Die Anwendung der üblichen Stabilitätskriterien schwingungsfähiger Systeme ergibt schließlich für die beiden Fälle (mit kleinen und großen Schwingungen) je eine notwendige Bedingung für die maximal zulässige Größe der Reibungsverluste im stationären Zustand und je zwei hinreichende Bedingungen für die erforderlichen Wasserschoßquerschnitte. Diese Bedingungen entsprechen den üblichen Thoma-Bedingungen am einfachen Wasserschoß. Das nachfolgende Beispiel zeigt die Anwendung der so gewonnenen Stabilitätsbedingungen auf einen der Praxis entnommenen Fall zweier hintereinander liegender Wasserschlösser.

**Summary.** Departing from the well-known fundamental dynamic equations of an oscillating system and from the two continuity equations, and using the equation of regulation for constant output, a non-linear and non-homogeneous differential equation of the 4th order is derived which describes completely the oscillating process. In case of small oscillations this differential equation is transformed into a linear and homogeneous form. Concerning great oscillations, only the case of sudden opening is treated and the differential equation is put into the form of an equation with flimsily variable coefficients. Hypotheses about the possible maximum amplitudes lead back to the linear and homogeneous form. Finally the application of the usual stability criteria of oscillating systems gives for both cases (small and great oscillations) the necessary conditions for the admissible highest value of the friction losses in the stationary state, and two adequate conditions for the required forebay cross-sections. These conditions correspond to the usual Thoma conditions referring to the simple forebay. An example points out the use of the obtained stability conditions in a case taken from the practice of two forebays laying in series.

**Résumé.** En partant des équations fondamentales dynamiques connues d'un système oscillant et des deux équations de continuité, et en employant l'équation de réglage en vue d'un rendement constant, une équation non-linéaire et non-homogène du 4<sup>me</sup> ordre est développée, impliquant totalement l'évènement d'oscillation. En cas de petites oscillations cette équation se transforme dans une équation différentielle linéaire et homogène. En ce qui concerne les oscillations fortes, seulement le cas de l'ouverture soudaine est examiné et l'équation différentielle est transformée dans une autre ayant des coefficients légèrement variables. Des hypothèses sur les amplitudes maxima possibles amènent aussi à la forme linéaire et homogène. L'emploi des critères usuels de stabilité des systèmes oscillants conduit enfin pour chacun des deux cas (petites et fortes oscillations) à une condition essentielle pour la grandeur maximum des pertes de friction admissibles dans l'état stationnaire et à deux conditions suffisantes pour les sections nécessaires du chateau d'eau. Ces conditions correspondent aux conditions usuelles de Thoma pour le chateau d'eau simple. Un exemple suivant tiré de la pratique de deux chateaux d'eau situés l'un derrière l'autre, explique l'emploi des conditions de stabilité ainsi obtenues.

Die Bestimmung des Verlaufes der Schwingungen eines Systems von zwei hintereinander liegenden, zwischen dem Staauraum und der Kraftzentrale eines Hochdruck-Wasserkraftwerkes an beliebiger Stelle der Triebwasserführung eingeschalteten Wasserschlössern ist schon seit langem bekannt. Die diesen Schwingungsvorgang bestimmenden Differentialgleichungen<sup>1</sup> erlauben es, den zeitlichen Verlauf und die

<sup>1</sup> Ph. Forchheimer: Hydraulik. Berlin. 1914; 3. Aufl. 1930.

extremen Spiegellagen auf numerischem<sup>2</sup> oder graphischem<sup>3</sup> Wege zu ermitteln. Bezüglich der Stabilität dieser verhältnismäßig selten zur praktischen Anwendung kommenden Anordnung liegt nur eine Arbeit<sup>4</sup> vor, in der sich deren Verfasser auf den Sonderfall gleicher Querschnitts- und Rauigkeitsverhältnisse der Stollenteile zwischen Speicher und Wasserschloß I einerseits und zwischen den Wasserschlässern I und II andererseits beschränkt, wobei auch nur kleine Schwingungen berücksichtigt werden.

Eine Erweiterung dieser Betrachtungen auf querschnittsmäßig und hydraulisch ungleiche Stollenteile sowie auf die Stabilität endlicher Schwingungen ist Aufgabe dieser Untersuchung. Sie wurde vom Verfasser für einen speziellen, im Rahmen der Oberstufe des Tauernkraftwerkes Glockner-Kaprun auftretenden Fall durchgeführt.

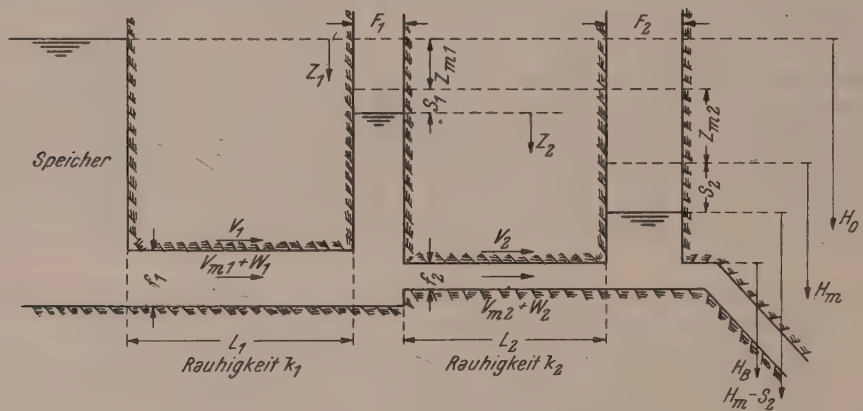


Abb. 1.

### 1. Die Aufstellung der Differentialgleichung.

Mit den Bezeichnungen:

$L_1$  ( $L_2$ ) ... Länge des Stollenteiles I (II) in m,

$f_1$  ( $f_2$ ) ... Querschnitt des Stollenteiles I (II) in m<sup>2</sup>,

$F_1$  ( $F_2$ ) ... Querschnitt des Wasserschlosses I (II) in m<sup>2</sup>,

$k_1$  ( $k_2$ ) ... Reibungsbeiwert des Stollens I (II) pro Längeneinheit,

$v_{m1}$  ( $v_{m2}$ ) ... Wassergeschwindigkeit im Stollen I (II) im stationären Zustand in m/sec,

$z_{m1}$  ( $z_{m2}$ ) ... Reibungsverlust im Stollen I (II) im stationären Zustand in m,

$$z_{m1} = k_1 L_1 v_{m1}^2, \quad z_{m2} = k_2 L_2 v_{m2}^2,$$

können die auftretenden Schwingungen  $z_1$  ( $z_2$ ), die die Stabilität des durch den Turbinenregler auf konstante Leistungsabgabe eingeregelter Systems beeinflussen, als Überlagerung des stationären Zustandes  $z_{m1}$  ( $z_{m2}$ ) mit den Spiegelbewegungen  $s_1$  ( $s_2$ ) aufgefaßt werden (Abb. 1).

Dies ergibt:

$$z_1 = z_{m1} + s_1 \quad \text{und} \quad z_2 = z_{m2} + s_2 \quad (1)$$

<sup>2</sup> Frank-Schüller: Schwingungen in den Zuleitungs- und Ableitungskanälen von Wasserkraftanlagen. Berlin. 1938.

<sup>3</sup> A. K. Schoklitsch: Graphische Hydraulik. Leipzig. 1922.

<sup>4</sup> W. Straubel: Zur Theorie gekuppelter Wasserschlässe bei selbsttätig geregelten Turbinenanlagen. Wasserkr. u. Wasserwirtsch. (1943).



und dementsprechend die Überlagerungsgleichungen der Geschwindigkeiten:

$$v_1 = v_{m1} + w_1 \quad \text{und} \quad v_2 = v_{m2} + w_2. \quad (2)$$

Mit

$$Q_0 = f_1 v_{m1} = f_2 v_{m2} \quad (3)$$

folgt im stationären Zustand für das Nutzgefälle  $H_m$ :

$$H_m = H_0 - (z_{m1} + z_{m2}) = H_0 - (k_1 L_1 v_{m1}^2 + k_2 L_2 v_{m2}^2) \quad (4)$$

und für die konstante Leistungsabgabe:

$$N = \gamma Q_0 H_m \eta. \quad (5)$$

Bei Änderung der Fallhöhe von  $H_m$  auf  $H_m - s_2$  und Einhaltung konstanter Leistungsabgabe ergibt sich die zugehörige Wassermenge  $Q$  unter Verwendung von (3) und unter Annahme konstanten Wirkungsgrades  $\eta$  zu:

$$Q = v_{m2} f_2 \frac{H_m}{H_m - s_2} = v_{m2} f_2 \frac{1}{1 - \frac{s_2}{H_m}}. \quad (6)$$

Aus den dynamischen Grundgleichungen<sup>5</sup>

$$\frac{L_1}{g} \frac{dv_1}{dt} = z_1 - k_1 L_1 v_1^2 \quad \text{und} \quad \frac{L_2}{g} \frac{dv_2}{dt} = z_2 - k_2 L_2 v_2^2$$

folgen unter Berücksichtigung der Konstanz von  $v_{m1}$  und  $v_{m2}$  und der Gl. (1) und (2) sowie der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} k_1 L_1 v_1^2 &= k_1 L_1 (v_{m1} + w_1)^2 = z_{m1} + 2 k_1 L_1 v_{m1} w_1 + k_1 L_1 w_1^2, \\ k_2 L_2 v_2^2 &= k_2 L_2 (v_{m2} + w_2)^2 = z_{m2} + 2 k_2 L_2 v_{m2} w_2 + k_2 L_2 w_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

die der weiteren Ermittlung zugrunde liegenden dynamischen Grundgleichungen zu:

$$\frac{L_1}{g} \frac{dw_1}{dt} = s_1 - 2 k_1 L_1 v_{m1} w_1 - k_1 L_1 w_1^2, \quad (8)$$

$$\frac{L_2}{g} \frac{dw_2}{dt} = s_2 - s_1 - 2 k_2 L_2 v_{m2} w_2 - k_2 L_2 w_2^2. \quad (9)$$

Aus den Kontinuitätsgleichungen:

$$F_1 \frac{dz_1}{dt} = f_2 v_2 - f_1 v_1 \quad \text{und} \quad F_2 \frac{dz_2}{dt} = Q - f_2 v_2 - F_2 \frac{ds_1}{dt},$$

die wegen der etwas geänderten und nach Abb. 1 definierten Bezeichnungsweise von den von Forchheimer angegebenen Gleichungen etwas abweichen, folgen mit (1) und (2) unter Verwendung der Regulierungsgleichung (6) und unter Berücksichtigung der Konstanz von  $z_{m1}$  und  $z_{m2}$  die der weiteren Rechnung zugrunde liegenden Kontinuitätsgleichungen:

$$F_1 \frac{ds_1}{dt} = f_2 w_2 - f_1 w_1, \quad (10)$$

$$\frac{F_2}{f_2} \frac{ds_2}{dt} = v_{m2} \frac{s_2}{H_m - s_2} - w_2. \quad (11)$$

Für die weitere Rechnung werden als Vergleichswerte für die beiden Wasserschloßquerschnitte  $F_1$  und  $F_2$  die zu dem jeweiligen Stollenteil gehörigen Thoma-Querschnitte  $T_1$  und  $T_2$  eingeführt, nämlich:

$$T_1 = \frac{f_1}{2 g k_1 H_m} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{f_2}{2 g k_2 H_m}, \quad (12)$$

<sup>5</sup> Siehe Anm. 1.

sowie die folgenden Verhältniswerte angenommen:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= n_1 T_1; & F_2 &= n_2 T_2; & f_1 &= \varphi f_2; & v_{m1} &= \frac{1}{\varphi} v_{m2}; \\ L &= L_1 + L_2; & L_1 &= (1 - \lambda) L; & L_2 &= \lambda L; & k_1 &= \kappa k_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da es außerdem bei dem vorliegenden Stabilitätsproblem nur auf die Schwingungsamplituden, nicht aber auf den zeitlichen Verlauf des Schwingungsvorganges ankommt, wird mit  $\tau = 2 g k_2 v_{m2} t$  und  $\frac{1}{dt} = 2 g k_2 v_{m2} \frac{1}{d\tau}$  eine neue (dimensionslose) unabhängige Veränderliche eingeführt und die Voraussetzung gemacht, daß Ableitungen nach  $\tau$  mit Strichen (') bezeichnet werden.

Unter Verwendung von (13) folgt dann aus (8):

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} 2 k_2 L_2 v_{m2} w_1' = s_1 - 2 k_1 L_1 v_{m1} w_1 - k_1 L_1 w_1^2 \quad (14)$$

und aus (9):

$$2 k_2 L_2 v_{m2} w_2' = s_2 - s_1 - 2 k_2 L_2 v_{m2} w_2 - k_2 L_2 w_2^2 \quad (15)$$

sowie unter Verwendung von (12) und (13) aus (10):

$$n_1 \frac{\varphi}{\kappa} \frac{v_{m2}}{H_m} s_1' = w_2 - \varphi w_1 \quad (16)$$

sowie aus (11):

$$n_2 \frac{v_{m2}}{H_m} s_2' = v_{m2} \frac{s_2}{H_m - s_2} - w_2. \quad (17)$$

Ferner ergibt sich aus (17):

$$w_2 = v_{m2} \frac{s_2}{H_m - s_2} - n_2 \frac{v_{m2}}{H_m} s_2', \quad (18a)$$

$$w_2' = v_{m2} \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2'}{H_m - s_2} - n_2 \frac{v_{m2}}{H_m} s_2'' \quad (18b)$$

und aus (16) unter Verwendung von (18):

$$w_1 = \frac{1}{\varphi} v_{m2} \frac{s_2}{H_m - s_2} - \frac{n_2}{\varphi} \frac{v_{m2}}{H_m} s_2' - \frac{n_1}{\kappa} \frac{v_{m2}}{H_m} s_1', \quad (19a)$$

$$w_1' = \frac{1}{\varphi} v_{m2} \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2'}{H_m - s_2} - \frac{n_2}{\varphi} \frac{v_{m2}}{H_m} s_2'' - \frac{n_1}{\kappa} \frac{v_{m2}}{H_m} s_1''. \quad (19b)$$

Schließlich erhält man aus (14) und (19):

$$n_2 s_2'' + A s_2' + B s_2 + \frac{\varphi}{\kappa} n_1 s_1'' + C s_1' + D s_1 = 0, \quad (20)$$

wobei:

$$A = n_2 \frac{\kappa}{\varphi} \left( 1 - \frac{1}{2} n_2 \frac{s_2'}{H_m} + \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m} \right) - \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2, \quad (20a)$$

$$B = -\frac{\kappa}{\varphi} \frac{H_m}{H_m - s_2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m} \right), \quad (20b)$$

$$C = n_1 \left( 1 + \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m} - \frac{1}{2} n_1 \frac{\varphi}{\kappa} \frac{s_1'}{H_m} - n_2 \frac{s_2'}{H_m} \right), \quad (20c)$$

$$D = \frac{\varphi \lambda}{1 - \lambda} \frac{H_m}{2 z_{m2}}. \quad (20d)$$

Ebenso folgt aus (15) und (18):

$$\frac{H_m}{2 z_{m2}} s_1 = n_2 s_2'' + E s_2' + F s_2 \quad (21)$$

mit:

$$E = n_2 \left( 1 + \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m} - \frac{n_2}{2} \frac{s_2'}{H_m} \right) - \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2, \quad (21a)$$

$$F = \frac{H_m}{2 z_{m2}} - \frac{H_m}{H_m - s_2} - \frac{1}{2} \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 \frac{s_2}{H_m}. \quad (21b)$$

Wird Gl. (21) zweimal differenziert, so erhält man:

$$\frac{H_m}{2 z_{m2}} s_1' = n_2 s_2''' + E s_2'' + (E' + F) s_2' + F' s_2, \quad (22 a)$$

$$\frac{H_m}{2 z_{m2}} s_1'' = n_2 s_2^{IV} + E s_2''' + (2 E' + F) s_2'' + (E'' + 2 F') s_2' + F'' s_2, \quad (22 b)$$

wobei:

$$E' = \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 \left( n_2 - 2 \frac{H_m}{H_m - s_2} \right) \frac{s_2'}{H_m} - \frac{n_2^2}{2} \frac{s_2''}{H_m}, \quad (23 a)$$

$$E'' = \left( 2 n_2 - 6 \frac{H_m}{H_m - s_2} \right) \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^3 \left( \frac{s_2'}{H_m} \right)^2 + \\ + \left( n_2 - 2 \frac{H_m}{H_m - s_2} \right) \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 \frac{s_2''}{H_m} - \frac{n_2^2}{2} \frac{s_2'''}{H_m}, \quad (23 b)$$

$$F' = - \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 \frac{s_2'}{H_m} \left( \frac{1}{2} + \frac{H_m}{H_m - s_2} \right), \quad (24 a)$$

$$F'' = - \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^3 \left( 1 + 3 \frac{H_m}{H_m - s_2} \right) \frac{s_2'}{H_m} - \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{H_m}{H_m - s_2} \right) \frac{s_2''}{H_m}. \quad (24 b)$$

Die beiden simultanen Differentialgleichungen 2. Ordnung (20) und (21) lassen sich unter Verwendung von (22), (23) und (24) zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung zusammenfassen, die die Gestalt

$$s_2^{IV} + a s_2''' + b s_2'' + c s_2' + d = 0 \quad (25)$$

hat und die Koeffizienten

$$a = \frac{1}{n_2} E + \frac{\kappa}{\varphi n_1} C, \quad (25 a)$$

$$b = \frac{\kappa}{\varphi n_1 n_2} \left[ \frac{H_m}{2 z_{m2}} n_2 + n_1 \frac{\varphi}{\kappa} (2 E' + F) + C E + n_2 D \right], \quad (25 b)$$

$$c = \frac{\kappa}{\varphi n_1 n_2} \left[ \frac{H_m}{2 z_{m2}} A + n_1 \frac{\varphi}{\kappa} (E'' + 2 F') + C (E' + F) + D E \right], \quad (25 c)$$

$$d = \frac{\kappa}{\varphi n_1 n_2} \left[ \frac{H_m}{2 z_{m2}} B + n_1 \frac{\varphi}{\kappa} F'' + C F' + D F \right] \quad (25 d)$$

enthält. Es ist dies die Differentialgleichung der im Wasserschloß II auftretenden Schwingung mit den Amplituden  $s_2$ , die bei Regulierung der Turbinenanlage auf konstante Leistung auftritt und durch den Schwingungsvorgang im Wasserschloß I beeinflusst wird. Die so ermittelte Differentialgleichung (25) ist weder homogen noch linear und entzieht sich in dieser Form der praktischen Auflösung. Es ist nunmehr Aufgabe der weiteren Untersuchungen, durch passende Näherungsannahmen die Differentialgleichung so umzuformen, daß sie die Gestalt einer linearen und homogenen Differentialgleichung 4. Ordnung annimmt.

## 2. Lösung für den Fall kleiner Schwingungen.

Wird in diesem Falle  $s_2 \ll H_m$  angenommen, so ergibt sich nach der Näherungsformel  $\frac{1}{1-x} = 1 + x$ :

$$\frac{H_m}{H_m - s_2} = \frac{1}{1 - \frac{s_2}{H_m}} \doteq 1 + \frac{s_2}{H_m}, \quad (26)$$

und werden ferner, wie dies in dem Fall durchaus zulässig erscheint, Potenzen von höherer als 1. Ordnung in der Unbekannten vernachlässigt, so erhält man für

$$A = n_2 \frac{\kappa}{\varphi} - 1, \quad (20 a/1)$$



$$B = -\frac{\kappa}{\varphi}, \quad (20 \text{ b/1})$$

$$C = n_1, \quad (20 \text{ c/1})$$

$$D = \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} \frac{H_m}{2 z_{m2}}, \quad (20 \text{ d/1})$$

$$E = n_2 - 1, \quad (21 \text{ a/1})$$

$$F = \frac{H_m}{2 z_{m2}} - 1. \quad (21 \text{ b/1})$$

Wegen der nunmehr vorhandenen Konstanz von  $E$  und  $F$  vereinfachen sich die Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  der Differentialgleichung (25) zu:

$$a = \frac{1}{n_2} (n_2 - 1) + \frac{\kappa}{\varphi}, \quad (25 \text{ a/1})$$

$$b = \frac{\kappa}{n_1} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) + \frac{1}{n_2} \left( \frac{H_m}{2 z_{m2}} - 1 - \frac{\kappa}{\varphi} \right) + \frac{\kappa}{\varphi}, \quad (25 \text{ b/1})$$

$$c = \frac{1}{n_1} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left[ \frac{\kappa^2}{\varphi^2} + \frac{\kappa \lambda}{1-\lambda} - \frac{\kappa}{n_2} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \right] + \frac{\kappa}{\varphi n_2} \left( \frac{H_m}{2 z_{m2}} - 1 \right), \quad (25 \text{ c/1})$$

$$d = \frac{\kappa}{\varphi n_1 n_2} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left( \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} \frac{H_m}{2 z_{m2}} - \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} - \frac{\kappa}{\varphi} \right). \quad (25 \text{ d/1})$$

Mit diesen Koeffizienten nach (25 a–d/1) ist die Differentialgleichung (25) homogen und linear geworden und kann nach dem unter Ziffer 4 beschriebenen Verfahren zur Gewinnung von Stabilitätskriterien herangezogen werden.

### 3. Lösung für den Fall endlicher Schwingungen.

Die für den Fall kleiner Schwingungen zur Anwendung gekommenen zwei Vernachlässigungen, nämlich

1. die Annahme der Kleinheit von  $s_2$  gegenüber  $H_m$  und
2. die Vernachlässigung von Potenzen höherer als 1. Ordnung

in der Differentialgleichung der Unbekannten bedeutet, wie ein Vergleich der Ausdrücke (20 a–d) und (21 a–b) mit den Ausdrücken (20 a–d/1) und (21 a–b/1) lehrt, nichts anderes als die näherungsweise Vorwegnahme der Lösung  $s_2$  zur Bestimmung der „schwach veränderlichen“ Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ . Im Falle kleiner Schwingungen wird hierfür die Lösung  $s_2 = 0$  und damit  $s_2' = 0$  und  $s_1' = 0$  postuliert.

Für den Fall endlicher Schwingungen wird, in Anlehnung an das durch K. Karas<sup>6</sup> berichtigte Näherungsverfahren, von J. Schüller<sup>7</sup> nur der Fall plötzlicher Öffnung untersucht und hierbei, entsprechend dem Fall kleiner Schwingungen, die folgenden Annahmen gemacht:

$$1. \quad s_2 < H_m; \quad \frac{H_m}{H_m - s_2} = 1 + \frac{s_2}{H_m} + \left( \frac{s_2}{H_m} \right)^2 + \dots \quad (26 \text{ a})$$

2. Näherungsweise Bestimmung derjenigen Glieder in den Koeffizienten (25 a–d), die die Linearität der Differentialgleichung (25) stören<sup>8</sup>. Hierzu werden die weiter folgenden Annahmen gemacht:

<sup>6</sup> K. Karas: Rechnerische Ermittlung der Spiegelbewegung gedämpfter Wasserschlösser. Ing.-Arch. (1941).

<sup>7</sup> J. Schüller: Eine wirtschaftliche Wasserschloßform. Schweiz. Bauztg. (1927).

<sup>8</sup> Die Zulässigkeit dieses Schlusses von dem von J. Schüller vorgeschlagenen Näherungsverfahren für das einfache Wasserschloß auf das vorliegende Wasserschloßsystem wird hierbei vorausgesetzt.

a) Nach J. Schüller kann für den Fall plötzlicher Spiegelsenkung  $s_2$  im Wasserschloß II in Gl. (17) die zusätzliche Stollengeschwindigkeit  $w_2$  gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt, werden und man erhält:

$$\frac{s_2'}{H_m} = \frac{1}{n_2} \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m}. \quad (27)$$

b) Mit K. Karas wird die Voraussetzung getroffen, daß die Senkung des Spiegels im Wasserschloß II nur bis zu dessen Boden erfolgen kann. Führt man  $H_B$  als Höhe des Wasserschloßbodens (mit gleichem unterem Ausgangspunkt wie  $H_m$ ) in die Rechnung ein, so erhält man:

$$s_{2 \max} = H_m - H_B = \beta H_m \quad \text{oder} \quad \frac{s_2}{H_m} = \beta. \quad (28)$$

c) Die Vernachlässigung von Potenzen höherer Ordnung von  $\frac{s_2}{H_m} = \beta$  in allen Ausdrücken.

Die folgende Rechnung wird in bezug auf Punkt 2 c unter Vernachlässigung von Potenzen höherer als 1. Ordnung in  $\beta$  durchgeführt, wobei die Zulässigkeit dieser Vereinfachung, besonders wenn die Bruttofallhöhe relativ klein ist, in jedem Falle gesondert zu überprüfen sein wird. Gegebenenfalls wären unschwer auch höhere Potenzen von  $\beta$  zu berücksichtigen.

Mit

$$\frac{H_m}{H_m - s_2} = 1 + \beta; \quad \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^2 = 1 + 2\beta; \quad \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^3 = 1 + 3\beta \quad \text{usw.} \quad (28)$$

erhält man durch zweimalige Differentiation von (27)

$$\frac{s_2'}{H_m} = \frac{1}{n_2} \frac{H_m}{H_m - s_2} \frac{s_2}{H_m} = \frac{\beta}{n_2}, \quad (27a)$$

$$\frac{s_2''}{H_m} = \frac{1}{n_2^2} \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^3 \frac{s_2}{H_m} = \frac{\beta}{n_2^2}, \quad (27b)$$

$$\frac{s_2'''}{H_m} = \frac{1}{n_2^3} \left( \frac{H_m}{H_m - s_2} \right)^5 \frac{s_2}{H_m} \left( 1 + 2 \frac{s_2}{H_m} \right) = \frac{\beta}{n_2^3}. \quad (27c)$$

Die gemäß Punkt 3, 4 und 5 getroffenen und in (27a—c) und (28) formulierten Annahmen bilden auch hier wieder das Postulat der Lösungen für die Werte von  $s_2$  und dessen Ableitungen, die es ermöglichen, die Differentialgleichung (25) auf eine lineare und homogene Form zu bringen.

Unter Verwendung der zitierten Ausdrücke erhält man aus (20a—b)

$$A = n_2 \frac{\kappa}{\varphi} \left( 1 + \frac{1}{2} \beta \right) - (1 + 2\beta), \quad (20a/2)$$

$$B = - \frac{\kappa}{\varphi} \left( 1 + \frac{3}{2} \beta \right), \quad (20b/2)$$

ferner aus (21a), (23a) und (23b)

$$E = n_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \beta \right) - (1 + 2\beta), \quad (21a/2)$$

$$E' = \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{n_2} \right) \beta, \quad (23a/2)$$

$$E'' = \frac{1}{n_2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{n_2} \right) \beta \quad (23b/2)$$

und schließlich aus (21b), (24a) und (24b)

$$F = \frac{H_m}{2 z_{m2}} - \left( 1 + \frac{3}{2} \beta \right), \quad (21b/2)$$

$$F' = -\frac{3}{2} \frac{\beta}{n_2}, \quad (24 \text{ a/2})$$

$$F'' = -\frac{3}{2} \frac{\beta}{n_2^2}. \quad (24 \text{ b/2})$$

Unter Benützung der so erhaltenen Ausdrücke läßt sich aus (22a)

$$\frac{s_1'}{H_m} = \frac{\beta}{n_2}. \quad (22 \text{ a/2})$$

ermitteln und man erhält schließlich aus (20c):

$$C = n_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} \frac{\varphi}{\kappa} \beta \right). \quad (20 \text{ c/2})$$

Wäre  $\beta$  als sehr klein gegenüber 1 anzunehmen, so könnten in den Ausdrücken für  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$  und  $F$  auch noch die Werte von  $\beta$  vernachlässigt werden, das heißt es könnte für die Ermittlung dieser Koeffizienten der Wert  $s_2 = 0$  vorausgesetzt werden und es ergäben sich damit die gleichen Ausdrücke, wie sie im Falle kleiner Schwingungen unter den gleichen Voraussetzungen abgeleitet worden sind.

Nach Auswertung der allgemeinen Formeln (25a–d) erhält man:

$$a = \frac{1}{n_2} (n_2 - 1) + \frac{\kappa}{\varphi} + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{n_2} - \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} \right) \beta, \quad (25 \text{ a/2})$$

$$b = \frac{\kappa}{n_1} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) + \frac{1}{n_2} \left( \frac{H_m}{2 z_{m2}} - 1 - \frac{\kappa}{\varphi} \right) + \frac{\kappa}{\varphi} + \\ + \left[ \frac{1}{n_2} \left( \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} - \frac{4}{n_2} - 2 \frac{\kappa}{\varphi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{\varphi} - \frac{n_1}{n_2} \right) \right] \beta, \quad (25 \text{ b/2})$$

$$c = \frac{1}{n_1} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left[ \frac{\kappa^2}{\varphi^2} + \frac{\kappa \lambda}{1-\lambda} - \frac{\kappa}{n_2} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \right] + \frac{\kappa}{\varphi n_2} \left( \frac{H_m}{2 z_{m2}} - 1 \right) + \\ + \left\{ \frac{1}{n_1} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa^2}{\varphi^2} + \frac{n \lambda}{1-\lambda} \right) - 2 \frac{\kappa}{n_2} \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{\lambda}{1-\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{\varphi n_2} \left( 1 + \frac{2}{n_2} \right) - \frac{1}{n_2^2} \left[ \frac{1}{2} (5 - n_1) + \frac{2}{n_2} \right] \right\} \beta, \quad (25 \text{ c/2})$$

$$d = \frac{\kappa}{\varphi n_1 n_2} \frac{H_m}{2 z_{m2}} \left[ \frac{H_m}{2 z_{m2}} \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} - \left( \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} + \frac{\kappa}{\varphi} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \beta \right) - \right. \\ \left. - \frac{n_1}{n_2} \frac{3 z_{m2}}{H_m} \left( \frac{1}{n_2} \frac{\varphi}{\kappa} + 1 \right) \beta \right]. \quad (25 \text{ d/2})$$

Die Differentialgleichung (25) ist damit ebenfalls linear und homogen geworden, und es ist nunmehr möglich, auch für diesen Fall endlicher Schwingungen wenigstens näherungsweise Kriterien für die Stabilität zu gewinnen.

#### 4. Allgemeine Diskussion der Lösung der linearen und homogenen Differentialgleichung 4. Ordnung.

Die Differentialgleichung 4. Ordnung (25) wird mit dem Ansatz  $s_2 = e^{r\tau}$  aufgelöst und führt auf die charakteristische Gleichung

$$r^4 + a r^3 + b r^2 + c r + d = 0. \quad (29)$$

Der durch diese Differentialgleichung beschriebene Schwingungsvorgang ist nur dann gedämpft, das heißt das Wasserschloß ist nur dann als stabil zu bezeichnen, wenn die Lösungen der charakteristischen Gleichung sämtlich nur negative Realteile besitzen. Dieser Bedingung ist dann entsprochen, wenn die Hurwitzschen Kriterien<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Frank-Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig. 1930.



erfüllt sind. Diese lauten, für den Fall der charakteristischen Gleichung 4. Grades angeschrieben, wie folgt:

1. Alle vier Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  müssen positiv sein, das heißt

$$a \geq 0; \quad b \geq 0; \quad c \geq 0; \quad d \geq 0. \quad (30)$$

2. Alle Determinanten der nachstehenden Matrix, die mit ..... bezeichnet sind, müssen positiv sein.

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 1 & b & d & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 1 & b & d \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Oder ausgeschrieben:

$$a \geq 0, \quad (31a)$$

$$a b - c \geq 0, \quad (31b)$$

$$a b c - c^2 - a^2 d \geq 0, \quad (31c)$$

$$a b c d \geq 0. \quad (31d)$$

Bei Erfüllung der Bedingungen (30) sind die Bedingungen (31a) und (31d) automatisch erfüllt und wegen  $a b - c = \frac{a^2 d}{c}$  aus (31c) ist bei der Erfüllung dieser Bedingung auch der Bedingung (31b) Genüge getan. Um das Wasserschloßsystem stabil zu halten, sind daher die Bedingungen (30) und (31c) zu erfüllen.

## 5. Diskussion der Lösung für kleine Schwingungen.

Da definitionsgemäß [nach (13)] die Relativwerte  $\varphi$ ,  $\kappa$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  und  $\lambda$  sowie  $\frac{H_m}{2 z_{m2}}$  stets positiv sind und da, ebenfalls nach (13),  $+1 > \lambda > 0$  ist, ergibt die Anwendung der Bedingung (30) auf den Koeffizienten  $d$  nach (25d/1):

$$\frac{\varphi \lambda}{1 - \lambda} \frac{H_m}{2 z_{m2}} - \frac{\varphi \lambda}{1 - \lambda} - \frac{\kappa}{\varphi} \geq 0.$$

Nach Umordnung erhält man dann unter Verwendung von (13):

$$H_m \geq 2 (z_{m1} + z_{m2}), \quad (32)$$

das heißt: „Die gesamten Reibungsverluste müssen kleiner sein als die halbe Nutzfallohde oder — wegen (4) — kleiner als ein Drittel der Bruttofallohde.“ Man vergleiche in diesem Zusammenhang die gleiche Bedingung für das einfache Wasserschloß, wie sie von D. Thoma<sup>10</sup> abgeleitet wurde.

Die Anwendung der Bedingung (30) auf den Koeffizienten  $a$  nach (25a/1) führt zu:

$$a \geq 0; \quad 1 - \frac{1}{n_2} + \frac{\kappa}{\varphi} \geq 0$$

oder:

$$n_2 \geq \frac{\varphi}{\varphi + \kappa}. \quad (33)$$

Damit ist der notwendige Mindestquerschnitt des Wasserschlosses II für die Dämpfung kleiner Schwingungen gefunden. Er ergibt sich mit (12) zu:

$$F_2 \geq \frac{\varphi}{\varphi + \kappa} \frac{\dot{f}_2}{2 g k_2 H_m}. \quad (34)$$

<sup>10</sup> D. Thoma: Beiträge zur Theorie des Wasserschlosses bei selbsttätig geregelten Turbinenanlagen. München. 1910.

Werden mit dem tatsächlich vorhandenen Wert  $n_2^*$  ( $n_2^* > n_2$ ) die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  nach den Formeln (25a/1), (25b/1) und (25c/1) ermittelt, so ergibt die Erfüllung der Bedingungen (30) und (31c) drei Werte für  $n_1$ , deren größter für die Bemessung des Wasserschlosses I mit

$$F_1 \geq n_{1\max} \frac{f_1}{2gk_1 H_m} \quad (35)$$

maßgebend ist. Die allgemeine Auswertung der Bedingungen (30) und (31c) für diesen Fall ist so langwierig und führt infolge der Vielzahl der die Stabilität beeinflussenden Koeffizienten zu keinem allgemeinen Kriterium, so daß auf eine solche Behandlung hier verzichtet wird.

## 6. Diskussion der Lösung für endliche Schwingungen.

Wie im Punkt 5, ergibt sich für den Koeffizienten  $d$  aus (25d/2) unter Berücksichtigung der Bedingung (30):

$$\frac{H_m}{2z_{m2}} \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} - \left( \frac{\varphi \lambda}{1-\lambda} + \frac{\kappa}{\varphi} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} \beta \right) - \frac{n_1}{n_2} \frac{3z_{m2}}{H_m} \left( \frac{1}{n_2} \frac{\varphi}{\kappa} + 1 \right) \beta \geq 0. \quad (36)$$

Da speziell bei Hochdruckanlagen  $z_{m2}$  gegenüber  $H_m$  als klein anzusehen ist, kann der letzte Summand von (36) als von zweiter Kleinheitsordnung betrachtet und demgemäß vernachlässigt werden. Man erhält dann nach Umordnung unter Verwendung von (13):

$$H_m \geq 2(z_{m1} + z_{m2}) \left( 1 + \frac{3}{2} \beta \right) \quad (36a)$$

oder unter Verwendung von (4):

$$H_0 \geq 3(z_{m1} + z_{m2})(1 + \beta), \quad (36b)$$

das heißt: „Die gesamten, mit dem Faktor  $(1 + \beta)$  multiplizierten Reibungsverluste müssen kleiner sein als ein Drittel der Bruttofallhöhe.“ Diese Bedingung entspricht der Thoma-Bedingung für den Fall kleiner Schwingungen.

Die Anwendung des Kriteriums (30) auf die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  sowie die Erfüllung der Bedingung (31c) überprüft man schließlich am zweckmäßigsten zahlenmäßig unter Verwendung der für die Ausführung tatsächlich vorgesehenen Verhältniswerte  $n_1^* > n_1$  und  $n_2^* > n_2$  in den Formeln (25a/2), (25b/2) und (25c/2), da eine allgemeine Auswertung, insbesondere des Kriteriums (31c), recht umständlich ist, ohne besondere neue Erkenntnisse zu liefern.

## 7. Ein Beispiel: Zwei hintereinander liegende Wasserschlösser beim Tauernkraftwerk Glockner-Kaprun.

Der Speicher der Oberstufe des Tauernkraftwerkes Glockner-Kaprun auf dem Mooserboden mit 84000000 m<sup>3</sup> Nutzinhalt ist im Regeljahr durch die Zuflüsse seines natürlichen Einzugsgebietes nicht auf sein volles Stauziel auf Kote 2035·00 m (ü. d. A. M.) aufzufüllen. Da die Abflüsse des westlich des Kapruner Tales gelegenen Stubachtales durch eine Kraftwerksgruppe der Österr. Bundesbahnen ausgenützt sind und das östlich benachbarte Fuscher Tal topographisch um einige Hunderte von Metern tiefer liegt, muß diese Ergänzung des Einzugsgebietes im wesentlichen südlich des Alpenhauptkammes gefunden werden, wobei sich als Hauptzubringer der Möllfluß anbietet, in dessen Oberlauf eine wirtschaftlich gerechtfertigte Abarbeitung des abfließenden Wassers mangels geeigneter, von der Natur vorgebildeter Großspeicherräume nicht möglich erscheint. Der Möllfluß, der am Fuße des Großglockners aus der Zunge des Pasterzengletschers entspringt, kann infolge der tiefen topographischen Lage dieses Gletschers nicht oberhalb des Stauzieles des Mooserbodenspeichers gefaßt

werden. Die Fassung der Möll erfolgt daher in einem kleinen Staubecken, dem Speicher Margaritze, mit Stauziel auf Kote 2000·00 m und rund 3 000 000 m<sup>3</sup> Nutzinhalt, von wo das gefaßte Wasser bei niedriger Spiegellage im Speicher Mooserboden durch den nahezu 12 km langen Möllüberleitungsstollen frei übrinnen kann, oder bei höheren Spiegellagen in den Mooserbodenspeicher gepumpt werden muß. Diese Tatsache zwingt zur Anordnung einer unterirdischen Pumpenstation, welcher für den Anfahr- und Abstellvorgang der Pumpen ein Wasserschloß vorgeschaltet werden muß. Der Steigschachtquerschnitt dieses mit einer unteren und einer oberen Kammer ausgerüsteten Zweikammerwasserschlosses bestimmt sich aus der Thoma-Bedingung für die Stabilität eines Schachtwasserschlosses an einer Pumpenleitung und wurde hieraus unter Berücksichtigung der üblichen Sicherheitsbeiwerte zu 22·20 m<sup>2</sup> bestimmt.

Das im Speicher Mooserboden für die Verwendung während der Zeit der Spitzenbelastung des Österr. Verbundnetzes aufgespeicherte Wasser wird im Krafthaus der Oberstufe abgearbeitet, das sich vor der Limbergssperre befindet. Hierzu wird, wie üblich, am oberen Ende des Druckschachtes oberhalb des Krafthauses ein weiteres Zweikammerwasserschloß errichtet, dessen Steigschachtquerschnitt mit Rücksicht auf die Thomasche Stabilitätsbedingung und unter

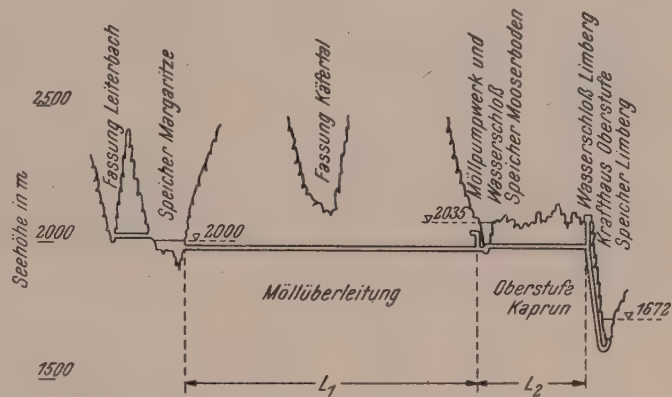


Abb. 2.

Einhaltung üblicher Sicherheitskoeffizienten mit 9·80 m<sup>2</sup> bestimmt wurde (Abb. 2).

Durch ein einfaches Schaltmanöver im nahe des Mooserbodenspeichers situierten Möllpumpwerkes, wo sich der Möllüberleitungsstollen mit dem Druckstollen der Oberstufe kreuzt, ist es möglich, mit dem im Speicher Margaritze aufgespeicherten Wasser eine der beiden, auf je 50 MW Leistungsabgabe und 18·0 m<sup>3</sup>/sec. Schluckfähigkeit dimensionierten Maschinensätze im Krafthaus der Oberstufe direkt zu betreiben, ohne daß für das Pumpen des Überschußwassers in den Speicher Mooserboden Energie aufgewendet werden muß. In diesem besonderen Falle sind in die vom Speicher Margaritze bis zum Krafthaus der Oberstufe durchlaufende Triebwasserleitung beide Wasserschlässe eingeschaltet, und es war die Frage zu klären, ob dieses System mit den bereits dimensionierten Steigschachtquerschnitten als stabil zu bezeichnen sei.

Mit den Abmessungen des Systems:

$$L_1 = 11\,536 \text{ m}, \quad L_2 = 3880 \text{ m}, \quad L = 15\,416 \text{ m}, \quad \lambda = 0\cdot252,$$

$$f_1 = 8\cdot53 \text{ m}^2, \quad f_2 = 8\cdot53 \text{ m}^2, \quad \varphi = 1\cdot00,$$

$$F_1 = 22\cdot2 \text{ m}^2, \quad F_2 = 9\cdot80 \text{ m}^2,$$

$$k_1 = 0\cdot801 \cdot 10^{-3}, \quad k_2 = 0\cdot296 \cdot 10^{-3}, \quad \kappa = 3\cdot40$$

und für  $Q = 18\cdot0 \text{ m}^3/\text{sec.}$

$$v_{m1} = 2\cdot11 \text{ m/sec.}, \quad v_{m2} = 2\cdot11 \text{ m/sec.},$$

$$z_{m1} = 41\cdot20 \text{ m}, \quad z_{m2} = 4\cdot10 \text{ m}$$

ergibt sich bei  $H_0 = 2000\cdot00 - 1670\cdot00 = 330\cdot00 \text{ m}$  für

$$H_m = 284\cdot70 \text{ m.}$$



Aus  $T_1 = 1.91 \text{ m}^2$  und  $T_2 = 6.49 \text{ m}^2$  folgt für  $n_1^* = 11.62$  und  $n_2^* = 1.51$ .

Für den Fall kleiner Schwingungen ergibt sich nach (30)

$$n_2 \geq 0.228$$

und mit  $n_2^* = 1.51$  aus der Anwendung der Bedingung (28c):

$$n_1 \geq 6.96.$$

Mit  $n_1^* = 11.62$  erhält man nach (25a—d/1):

$$\dot{a} = 3.74, \quad b = 37.05, \quad c = 104.95, \quad d = 53.60,$$

wodurch die Bedingungen (27) erfüllt sind. Die Erfüllung der Bedingung (28c) ersieht man aus:

$$a b c - c^2 - a^2 d = 2778.56.$$

Für den Fall großer Schwingungen ergibt sich, wenn als Wasserschloßboden die Oberkante der Unterkammer des Limbergwasserschlosses auf Kote 1941.55 m angesehen wird:

$$H_B = 1941.55 - 1670.00 = 271.55; \quad \beta = 0.0462.$$

Mit  $a = 3.52$ ;  $b = 36.76$ ;  $c = 64.65$ ;  $d = 53.34$  nach (25a—d/2) ist die Bedingung (27) und mit  $a b c - c^2 - a^2 d = 3525.21$  auch die Bedingung (28c) erfüllt, womit das vorliegende Wasserschloßsystem auch für große Schwingungen als stabil anzusehen ist.

(Eingegangen am 23. Februar 1951.)

## Die Abhängigkeit des Curie-Punktes der Ferromagnetika vom Magnetfeld.

Von K. M. Koch, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Einleitend wird gezeigt, daß die Beschreibung des Ferromagnetismus mittels der Theorie der geordneten Zustände nach Bragg und Williams (in Analogie zu den Verhältnissen beim Supraleiter) zu einer Abhängigkeit des Curie-Punktes vom Magnetfeld führt. Wir haben am gleichen Material (Nickel) den Widerstand und die differentielle Thermokraft in Abhängigkeit von der Temperatur bei Feldstärken bis zu 9000 Oersted gemessen. Versucht man aus den erhaltenen Kurven einen Curie-Punkt zu extrapolieren, so erhält man in beiden Fällen eine Verschiebung von rund 10 Grad für  $H = 9000$  Oersted. [Aus den  $\sigma(T)$ -Kurven nach Weiß und Forrer (Abb. 1) würde man auf eine Verschiebung von ungefähr 30 Grad für  $H = 17500$  Oersted schließen.]

**Summary.** Firstly it is proved that the description of ferromagnetism by means of the theory of ordered states according to Bragg and Williams (in analogy to the case of superconductors) leads to a dependence of the Curie point on the magnetic field. The resistance and the differential thermoelectric force have been measured on the same material (nickel) in dependence on the temperature and in cases of field intensities up to 9000 Oersted. If one tries to extrapolate a Curie point from the so gained curves, a dislocation from about 10 degrees for  $H = 9000$  Oersted takes place in both cases. [The  $\sigma(T)$  curves according to Weiß and Forrer (fig. 1) would lead to the conclusion that the dislocation is about 30 degrees for  $H = 17500$  Oersted.]

**Résumé.** Au début, il est démontré que la description du ferromagnétisme à l'aide de la théorie des états ordonnés d'après Bragg et Williams (analogue au cas du superconducteur) amène à une dépendance du point Curie du champ magnétique. La résistance et la force thermo-électrique différentielle furent mesurées au même matériel (nickel) en dépendance de la température pour des intensités de champ jusqu'à 9000 Oersted. En essayant l'extrapolation d'un point Curie des courbes obtenues, on arrive dans les deux cas à une dislocation de 10 degrés pour  $H = 9000$  Oersted. [On pourrait conclure des courbes  $\sigma(T)$  d'après Weiß et Forrer (fig. 1) à une dislocation d'environ 30 degrés pour  $H = 17500$  Oersted.]

## I. Grundsätzliches.

1. Wir wollen davon ausgehen, daß der Zustand eines Ferromagnetikums als Funktion der Temperatur sich in Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes in vollkommen gleichwertiger Weise durch die Weißsche Theorie oder durch die Theorie der geordneten Zustände in der Form, die ihr Bragg und Williams gegeben haben, beschreiben läßt. Nach Weiß erhält man für den Quotienten aus der tatsächlichen Magnetisierung  $M$  und der maximal möglichen  $M_\infty$

$$\frac{M}{M_\infty} = \tanh \frac{\mu W M_\infty \cdot \frac{M}{M_\infty}}{k T}. \quad (1)$$

(Hier ist  $WM$  das Weißsche innere Feld,  $WM_\infty$  sein Maximalwert bei vollständiger Ausrichtung aller Spins,  $\mu$  das magnetische Moment eines Spins.)  $M/M_\infty$  entspricht begrifflich völlig dem Ordnungsgrad  $S$  der Bragg-Williamschen Theorie ( $S$  und  $M/M_\infty$  sind 1 für volle Ordnung und Null bei vollständiger Unordnung).  $V_0$  ist die Arbeit, die man leisten muß, um in einem völlig geordneten Kristall ein  $A$ - und ein  $B$ -Atom miteinander zu vertauschen. Man hat daher den halben Energiebetrag aufzuwenden, um ein  $A$ -Atom aus einer „richtigen“ in eine „falsche“ Gitterposition zu bringen. Auf der anderen Seite ist die Arbeit, die aufgewendet werden muß, um in einem vollständig ausgerichteten Weißschen Bezirk einen Spin um  $180^\circ$  zu drehen, gleich  $2\mu W M_\infty$ , dieser Energiebetrag entspricht so dem Wert  $V_0/2$  der Braggschen Theorie. Wenn man diesen Umstand beachtet, so ist Gl. (1) und der Ausdruck, den die Braggsche Theorie für den Ordnungsgrad einer binären Legierung mit gleicher Anzahl von Atomen beider Gattungen liefert,

$$S = \tanh \frac{V_0 S}{4 k T} \quad (2)$$

vollständig äquivalent. Aus beiden Gleichungen erhalten wir für die Temperatur  $\Theta$ , oberhalb derer der Ordnungszustand Null ist,

$$\Theta = \frac{V_0}{4 k} = \frac{\mu W M_\infty}{k}. \quad (3)$$

Die Gleichwertigkeit von (1) und (2) geht aber verloren, sobald wir die Wirkung eines äußeren Magnetfeldes berücksichtigen wollen. Die Weißsche Theorie stellt das äußere und das innere Feld als gleichwertige Summanden gegenüber. Aus Gl. (1) wird so

$$\frac{M}{M_\infty} = \tanh \frac{\mu (H + W M)}{k T}. \quad (4)$$

Versucht man in der bekannten Weise aus der graphischen Darstellung der Gl. (4) die Magnetisierung als Funktion der Temperatur bei konstantem Magnetfeld zu ermitteln, so sieht man, daß für  $H \neq 0$  streng genommen keine Grenztemperatur mehr existiert, sondern nur eine asymptotische Annäherung an den Nullwert. Wir haben in Abb. 1 eine für  $H = 10^5$  Oersted aus Gl. (4) durch punktweise Konstruktion gewonnene Kurve eingezeichnet (für kleinere Feldstärken ist die Konstruktion wegen des hohen Wertes von  $WM_\infty$  nicht ausführbar). Zum Vergleich sind die aus den Messungen

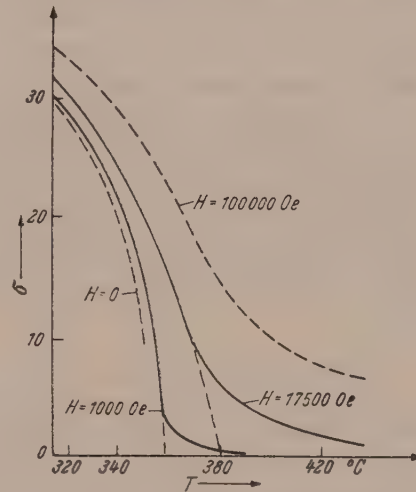


Abb. 1. Die spezifische Sättigungsmagnetisierung von Ni nach den Messungen von Weiß und Forrer. Die strichlierten Kurvenstücke sind von uns eingezeichnet.

von P. Weiß und R. Forrer<sup>1</sup> entnommenen Kurven für  $H = 5000$  und  $17500$  Oersted eingezeichnet. Es besteht offensichtlich qualitative Übereinstimmung, das heißt der „Fuß“ der  $\sigma_{H,T}$ -Kurven hat die gleiche Gestalt wie die aus der Theorie abgeleitete Kurve. Was die Kurve für  $\sigma_{0,T}$  anlangt, so kann ihr Verlauf aus den  $\sigma(H)$ -Isothermen oberhalb  $0.9 T/\Theta$  nicht mehr abgeleitet werden. Man kann aber aus den Messungen der spezifischen Wärme oder des magnetokalorischen Effektes den Schluß ziehen, daß die spontane Magnetisierung in der Nähe des Curie-Punktes nicht so scharf verschwindet, wie es die Theorie verlangt. Dieses Verhalten legt den Schluß nahe, daß der eigenartige Verlauf der  $\sigma_{H,T}$ -Kurven bei höheren Temperaturen dadurch bedingt ist, daß der bei tieferen Temperaturen vorherrschende Ordnungsmechanismus („long range order“) durch einen anderen („short range order“) abgelöst wird. Dann kann man aber versuchen, die Kurven so, wie es in der Abbildung strichliert eingezeichnet wurde, zu extrapolieren und die erhaltenen Schnittpunkte mit der  $T$ -Achse als Curie-Punkte im engeren Sinn, das heißt als jene Temperaturen, bei denen die „long range order“ zerstört ist, zu definieren. Diese so definierten Curie-Punkte wären dann aber, wie die Abbildung zeigt, vom Magnetfeld abhängig.

2. Genau genommen, enthält die Weißsche Theorie infolge ihrer historischen Entwicklung aus der Langevinschen Theorie des Paramagnetismus ein recht unlogisches Element, indem sie das um mehrere Größenordnungen überlegene Weißsche Feld  $WM$  sozusagen als Zusatz zum äußeren Feld einführt. Wäre man von vornherein von der Ordnungs-Unordnungs-Theorie ausgegangen, so hätte man sicher eher das äußere Feld bzw. eine von ihm abhängige Größe als Zusatzglied zur Ordnungsenergie  $V_0$  eingeführt. Aus Gl. (2) würde so

$$S = \tanh \frac{[V_0 + f(H)] \cdot S}{4kT}. \quad (5)$$

Für kleinere Feldstärken kann man  $f(H)$  in erster Näherung provisorisch durch const.  $H$  ersetzen. Aus Gl. (5) erhält man so, im Gegensatz zur Weißschen Theorie, für jede Feldstärke einen definierten Umwandlungspunkt  $\Theta$

$$\Theta = \frac{V_0 + cH}{4k}, \quad (6)$$

der nunmehr von der Feldstärke abhängt.

Nach Gl. (5) bewirkt das Magnetfeld eine Erhöhung des Ordnungsgrades bei konstanter Temperatur. Das ist im wesentlichen das gleiche wie die Erhöhung der spontanen Magnetisierung (die „wahre“ Magnetisierung nach Gerlach), die sich auch aus der Weißschen Theorie ergibt. Das Vorzeichen des magnetokalorischen Effektes stimmt mit dieser Konsequenz der Theorie überein.

Die hier vorgeschlagene Formulierung der Rolle des äußeren Magnetfeldes als Störung des Gitterpotentials dürfte — das ist ein nicht ganz zu vernachlässigendes Argument — der quantenphysikalischen Behandlung des Kristallproblems besser entsprechen als die in der ursprünglichen Weißschen Theorie enthaltene.

3. Es ist aber weiters kaum völlig bedeutungslos, daß die in Gl. (5) ausgedrückte Auffassung, wie an anderer Stelle etwas ausführlicher gezeigt worden ist<sup>2</sup>, das Phänomen der Supraleitung in eine ganz bestimmte Relation zu dem des Ferromagnetismus setzt, eine Relation, die deshalb von besonderem Interesse ist, weil nach den bisherigen Erfahrungen Supraleitung und Ferromagnetismus sich gegenseitig ausschließen scheinen. Der Umstand, daß im Falle der Supraleitung das Magnetfeld

<sup>1</sup> P. Weiß und R. Forrer: C. R. hebdomadaire Séances Acad. Sci. **178**, 1670 (1924).

<sup>2</sup> K. M. Koch: Österr. Ingenieur-Arch. **3**, 344 (1949).



eine Senkung der Umwandlungstemperatur (Sprungpunkt) bewirkt, läßt sich in Analogie zu Gl. (5) durch einen Ansatz von der Form

$$S = S \left( \frac{(V_0 - c H) S}{k T} \right) \quad (7)$$

ausdrücken, aus dem sich für den Sprungpunkt der Ausdruck

$$\Theta = \frac{V_0 - c H}{k S'(0)} \quad (8)$$

ergibt. Das Vorzeichen des magnetokalorischen Effektes ist beim Supraleiter auch tatsächlich das umgekehrte, wie beim Ferromagnetikum, entspricht also der durch Gl. (7) ausgedrückten Reduktion des Ordnungsgrades durch das Magnetfeld. Die Tatsache nun, daß das Eindringen eines äußeren Feldes in den Supraleiter durch an der Oberfläche ausgelöste „Abschirmströme“ verhindert wird, ganz gleich, ob das Magnetfeld im supraleitenden Zustand eingeschaltet wird (normaler Induktionseffekt) oder schon vorher (klassisch nicht mehr deutbarer „Meißner-Ochsenfeld“-Effekt), erscheint auf Grund der in Gl. (7) enthaltenen Formulierung in einem neuen Licht. Da das Maximum des Ordnungsgrades (das für  $H = 0$  erreicht wird) mit dem Minimum der potentiellen Energie des Kristalls zusammenfällt, kann man die Entstehung des Abschirmstromes als Folge der Tendenz nach der minimalen Energie verstehen. Die eingehendere Untersuchung zeigt allerdings, daß dieses Minimum durch eine Verminderung des Ordnungsgrades in der vom Abschirmstrom durchflossenen Oberflächenschicht erkauft wird, daß hier also eine Koppelung von Volums- und Oberflächenzuständen vorliegt, die zweifellos nur von der Quantenphysik des Kristalls aus verstanden werden kann.

Daß wir bei der Umwandlung normal—supraleitend, im Gegensatz zu den Verhältnissen bei der Umwandlung ferro—paramagnetisch auch im Magnetfeld verhältnismäßig scharfe Umwandlungspunkte beobachten, hat dazu geführt, daß in diesem Fall die Annahme einer feldstärkenabhängigen Umwandlungstemperatur von vornherein akzeptiert worden ist. Die relative Schärfe des Sprungpunktes ist aber wohl in erster Linie durch den Umstand bestimmt, daß hier das Magnetfeld und die Temperatur im gleichen Sinne, nämlich ordnungszerstörend, wirken, während sie beim Ferromagnetikum sich entgegenwirken. Außerdem wird die Schärfe des Umwandlungspunktes beim Supraleiter bis zu einem gewissen Grad dadurch vorgetäuscht, daß wir bei der üblichen Messung des Widerstandsverlaufs nur den Zustand einer sehr dünnen Oberflächenschicht erfassen. Beim genaueren Studium der Umwandlung normal—supraleitend findet man, daß auch hier die Überlagerung von Ordnungstendenzen höheren und niedrigeren Ranges („long range“ und „short range order“) eine bestimmende Rolle spielt.

## II. Meßergebnisse.

1. Die Diskussion über die Existenz des Curie-Punktes im Magnetfeld und seine Beeinflussung durch dieses wird am besten gefördert, wenn man Materialeigenschaften, die von der spontanen Magnetisierung abhängig sind, in der Umgebung des Curie-Punktes und bei verschiedenen Feldstärken mißt. Das ist z. B. für den spezifischen Widerstand durch verschiedene Autoren und insbesondere durch Potter<sup>3</sup> mit großer Gründlichkeit geschehen. Auch Messungen der Thermokraft sind schon in größerem Umfang durchgeführt worden<sup>4</sup>. Wenn wir diese Messungen trotzdem wiederholt

<sup>3</sup> H. H. Potter: Proc. Roy. Soc. (London) **132**, 560 (1931).

<sup>4</sup> Simon und Bouchard: C. R. hebdomadaire Séances Acad. Sci. **205**, 1144 (1937); **206**, 667 (1938). — Bouchard: C. R. hebdomadaire Séances Acad. Sci. **226**, 1708 (1948).

haben, so ist dies aus zwei Gründen geschehen. Erstens schien es von Vorteil, wenn einmal zwei verschiedene Meßreihen am gleichen Material ausgeführt würden. Zweitens haben wir die Messungen der Thermokraft, im Gegensatz zu den anderen Autoren,

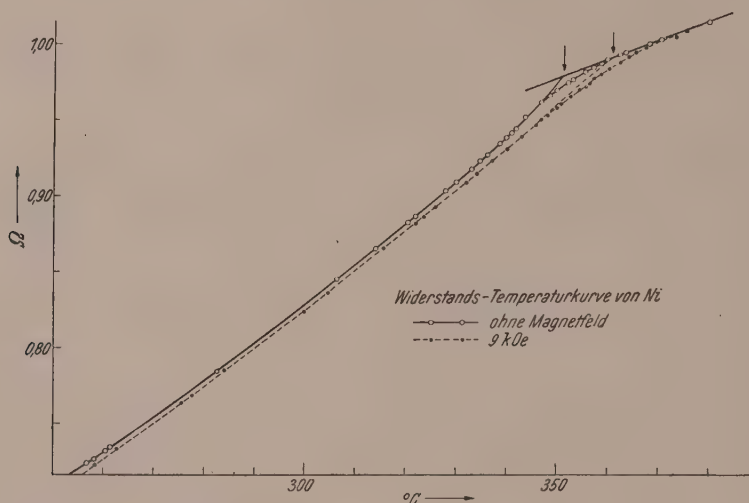


Abb. 2. Der spezifische Widerstand von Ni als Funktion der Temperatur bei  $H = 0$  und  $H = 9000$  Oersted. Die Pfeile weisen auf die extrapolierten Curie-Punkte.

von vornherein auf die differentielle Thermokraft eingestellt, weil wir so eine höhere Genauigkeit der Relativwerte erzielen konnten, wenn auch vielleicht mit einem Verzicht auf Genauigkeit der Absolutwerte. Die Messungen wurden in beiden Fällen im

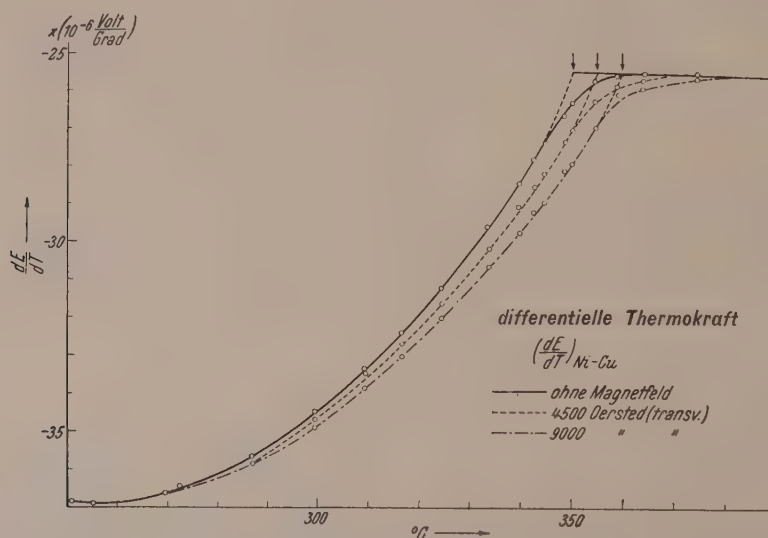


Abb. 3. Die differentielle Thermokraft von Ni gegen Kupfer ( $T_2 - T_1 < 5$  Grad) bei  $H = 4500$  und  $9000$  Oersted (transversales Feld). Die Pfeile weisen auf die extrapolierten Curie-Punkte.

transversalen Magnetfeld ausgeführt, nachdem Potter gezeigt hatte, daß in der Nähe des Curie-Punktes die Widerstandsänderung im transversalen und longitudinalen Feld quantitativ übereinstimmt. Als Material kam Reinnickel der Firma Krupp in Bernsdorf (0.5 mm Durchmesser) zur Verwendung. Der Reinheitsgrad ist leider unbekannt,

aus dem Temperaturkoeffizienten kann geschlossen werden, daß er nicht sehr groß ist.<sup>5</sup> Abb. 2 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes, Abb. 3 die der Thermokraft (gegen Kupfer, die Temperaturdifferenzen der beiden Lötstellen bleiben immer unter  $5^\circ$ ) von der Temperatur; die Kurven beziehen sich jeweils auf konstante Feldstärke. Die Abbildungen lassen deutlich erkennen, daß die Umwandlung auch bei  $H = 0$  in einem größeren Temperaturintervall erfolgt, das nur wenig schmaler ist als bei Einwirkung des Magnetfeldes. Die (strichliert) eingezeichnete Extrapolation zur Ermittlung des Curie-Punktes ist bei den auf  $H = 0$  bezüglichen Kurven etwas leichter durchzuführen als bei den im Magnetfeld erhaltenen Messungen, der Unterschied ist aber nur ein gradueller und kein grundsätzlicher. Berücksichtigt man, daß die funktionale Ab-

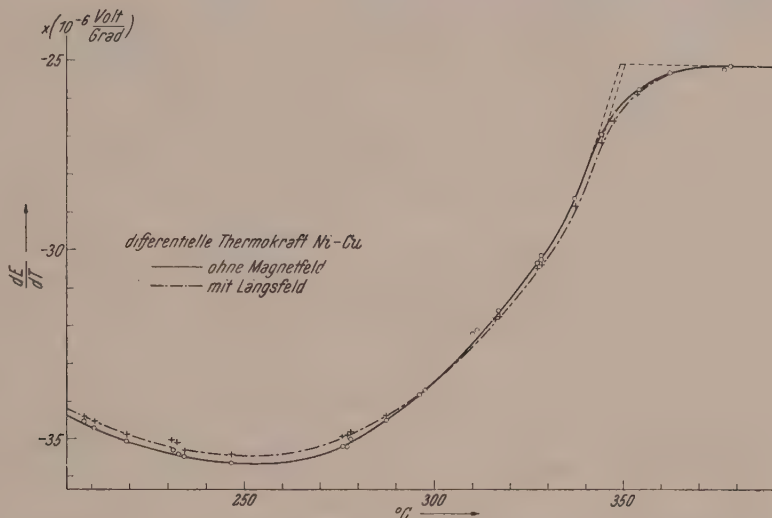


Abb. 4. Die differentielle Thermokraft von Ni gegen Cu im longitudinalen Magnetfeld ( $H = 1000$  Oersted). (Die geringfügige Abweichung der Curie-Punkte gegenüber den anderen Messungen dürfte wohl nur auf die Schwierigkeit der Extrapolation zurückzuführen sein.)

hängigkeit der Thermokraft von der Magnetisierung kaum genau die gleiche sein wird wie die des Widerstandes, so muß es schon recht überzeugend wirken, wenn wir in beiden Fällen für die extrapolierten Curie-Punkte die gleichen Werte erhalten, nämlich  $\Theta \approx 350^\circ$  bei  $H = 0$  und  $\Theta \approx 360^\circ$  bei  $H = 9000$  Oersted. Auch die Breite der Übergangsintervalle, in denen die Kurve der Meßergebnisse von den extrapolierten Kurven abweicht, stimmt für die verschiedenen Feldstärken überraschend gut überein. Auf Grund dieser Ergebnisse ist auch verständlich, wieso Ahrens<sup>6</sup> bei seinen Messungen der spezifischen Wärme durch ein Magnetfeld von 500 Oersted (longitudinal) keine Verschiebung beobachten konnte; sie müßte nach unseren Messungen unterhalb von  $1/2^\circ$  liegen. Natürlich würde der Nachweis einer Verschiebung der  $c(T)$ -Kurve durch das Magnetfeld (analog dem Verhalten der Supraleiter) noch überzeugender wirken als die vorliegenden Messungen.

2. Die Beeinflussung der Thermokraft durch das Magnetfeld wurde wenigstens für einen Feldstärkenwert (1000 Oersted) auch im longitudinalen Feld untersucht. Wir erhielten (Abb. 4) eine Verschiebung im gleichen Sinn wie im transversalen Feld und auch in guter größenordnungsmäßiger Übereinstimmung. Daß wir in diesem Fall bei tieferen Temperaturen aber auch eine Beeinflussung der Thermokraft von entgegengesetztem Vorzeichen beobachten konnten, scheint uns ganz besonders auf-

<sup>5</sup> Für reines Nickel:  $R_{350}/R_0 = 4.44$ , Reinnickel der Firma Krupp, Berndorf:  $R_{350}/R_0 = 3.19$ .

<sup>6</sup> E. Ahrens: Ann. Physik 21, 169 (1934).



schlußreich zu sein. Es beweist nämlich, daß tatsächlich der Ordnungsgrad für die Änderungen maßgebend ist. Obgleich wir bedauerlicherweise aus Zeitmangel Messungen der Widerstandsänderung im gleichen Temperaturbereich unterlassen haben, besteht kaum ein Zweifel, daß hier auch diese Größe das umgekehrte Vorzeichen aufgewiesen hätte, wie bei höheren Temperaturen. Wir sind hier in dem Temperaturbereich, wo die Kristallanisotropie noch von Null verschieden ist und wo die Drehung des Magnetisierungsvektors in die Richtung des Meßstroms einer Störung des Ordnungszustandes gleichkommt. In der Umgebung des Curie-Punktes fällt dieser Umstand weg, hier dominiert die Erhöhung der spontanen Magnetisierung durch das Magnetfeld, also die Erhöhung des Ordnungsgrades, die sich in einer Erniedrigung des elektrischen Widerstandes auswirkt. Es ist sehr befriedigend, daß die Beeinflussung der Thermokraft durch ihren Vorzeichenwechsel den gleichen Sachverhalt ausspricht. Daß die Drehungen des Magnetisierungsvektors bei tieferen Temperaturen eine Störung des Ordnungszustandes bewirken, geht auch aus den röntgenographischen Messungen von F. Regler<sup>7</sup> hervor, die ein Anwachsen der Gitterstörungen in diesem Bereich zeigen. Es wäre sehr erwünscht, diese Messungen in der Nähe des Curie-Punktes durchzuführen, man würde hier ein Verschwinden dieser (reversiblen) Gitterstörungen erwarten.

Die vorstehend besprochenen Messungen sind der Dissertation von Diplomingenieur A. Eidinger entnommen, der sie mit überaus dankenswertem Eifer und großer Geschicklichkeit ausgeführt hat. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Ergebnisse dieser Messungen zwar keinen absolut bündigen Beweis für die Annahme eines vom Magnetfeld abhängigen Curie-Punktes darstellen, wohl aber einen Ansporn zur eingehenderen Untersuchung dieses Problems zu geben geeignet sind.

Durch die freundliche Vermittlung von Herrn Dr. Brilli (Wiener Vertretung der Vakuumschmelze Hanau) erhielten wir nach Abschluß dieses Berichtes eine Probe von Rein-Nickel mit 0.5% Eisen, sonstige Verunreinigungen in Spuren. Die Messungen an dieser Probe ergaben genau den gleichen Verlauf der  $R(T)$ - und  $e(T)$ -Kurven wie bei dem Nickel von Krupp-Berndorf, nur war der Betrag der „Verschiebung“ des Curiepunktes etwas geringer.

(Eingegangen am 13. März 1951.)

## Zuschriften.

### Zur Ableitung des Croccoschen Wirbelsatzes.

Im Anschluß an die unter gleichem Titel erschienene Arbeit von F. Magyar (Bd. IV, Heft 2, S. 139) möchte ich mir den Hinweis erlauben, daß meiner Ableitung wie allen vorausgegangenen die allgemeine Form der Euler-Gleichung zugrunde liegt, während in der zitierten Arbeit  $1/\rho \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} \Pi$  gesetzt ist. Durch Anwenden des Operators „rot“ auf diese Beziehung sieht man leicht, daß sich die Form der Eulerschen Gleichung in der zitierten Arbeit und die daraus abgeleiteten Schlüsse nur auf barotrope Strömungen beziehen, eine Einschränkung, welche bei den Ableitungen des Croccoschen Satzes nicht gemacht wird.

Die bei diesen Ableitungen zusätzliche Voraussetzung der Isoenergie liegt beispielsweise der bekannten Rankine-Hugoniotschen Verdichtungsstoßtheorie zugrunde. Darnach bleibt  $i_0$  hinter einer stationären Stoßwelle im Raume konstant, wenn  $i_0$  davor konstant war. Die Strömung hinter einem Stoß (etwa hinter der Kopfwelle eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Meteors) stellt daher auch das Hauptanwendungsgebiet des Croccoschen Satzes dar. Sie weist bei konstantem Wert von  $i_0$

<sup>7</sup> F. Regler: S.-B. Akad. Wiss. Wien 62ff. (1950).

die durch die Entropieunterschiede auf den einzelnen Stromlinien hinter der Kopf- welle bedingten Wirbel auf.

Sehr allgemein — mit veränderlichem  $i_0$ , instationär und mit Reibung und Wärme- leitung — und in Übereinstimmung mit allen vorausgegangenen Arbeiten wird das Problem von A. Vazsonyi (Quart. appl. Math. III, S. 29—37, 6—8, 1945) behandelt. Überflüssigerweise und abweichend von den praktischen Bedürfnissen wird dabei allerdings der Reibungskoeffizient als konstant vorausgesetzt.

*K. Oswatitsch*, Stockholm.

Die meisten Autoren benützen zur Ableitung des Croccoschen Wirbelsatzes außer der Eulerschen Gleichung die Wärmegleichung oder sonstige allgemeine thermo- dynamische Beziehungen, aus welchen (im Gegensatz zur Ableitung des Wirbelsatzes von Bjerknes) das Druckglied eliminiert wird. Daher ist es für das Ergebnis

$$\nabla i_0 \text{ bzw. } \nabla H = T \nabla S - 2 \mathfrak{w} \times \mathfrak{v}$$

belanglos, ob man  $\frac{1}{\rho} \nabla p$  oder  $\nabla \Pi$  einführt. Tatsächlich kommen auch außer den von mir angeführten Autoren v. Mises und Krahn noch Milne-Thomson und Vazsonyi zu demselben Endergebnis. Vazsonyi bezeichnet die obige Gleichung als Verallgemeinerung des Croccoschen Satzes, die sich für  $i_0$  bzw.  $H = \text{konst.}$  auf die bekannte Form reduziert. Er erklärt aber ausdrücklich, daß die Bedeutung der allgemeineren Gleichung durch die Abhängigkeit von  $H$  und  $S$  zum Ausdruck kommt.

Die Annahme  $i_0$  bzw.  $H = \text{konst.}$  folgt nicht aus der Ableitung, die bloß den obigen Zusammenhang liefert, sondern kann bei speziellen Problemen nur zusätzlich herangezogen werden. Andererseits ergibt sich aber  $i_0 = \text{konst.}$  (räumlich) in üblicher Weise auch, wenn  $\nabla S$  und  $\mathfrak{w}$  für sich gleich Null sind.

*F. Magyar*, Wien.

### Alfons Leon †.

Am 30. Mai 1951 ist der ordentliche Professor für Baustofflehre und Mechanische Technologie I und Vorstand der Technischen Versuchsanstalt an der Technischen Hochschule Wien, Dr. Alfons Leon, einem kurzen schweren Leiden erlegen. Damit hat ein arbeitsreiches Leben, das ganz in den Dienst der Wissenschaft gestellt war, unerwartet seinen Abschluß gefunden.

Leon wurde 1881 in Ragusa (Dalmatien) geboren; aber Innsbruck, wo er seine Kindheit verbrachte, wurde ihm zur eigentlichen Heimat. Nach Absolvierung der Bauingenieurschule an der Technischen Hochschule in Wien und Promotion zum Doktor der technischen Wissenschaften habilitierte sich Leon 1907 an der gleichen Hochschule für das Fachgebiet „Elastizitätstheorie“, das 1909 für das Gesamtgebiet der „Technischen Mechanik und Materialprüfung“ erweitert wurde. 1913 erlangte er auch die Habilitation an der Hochschule für Bodenkultur in Wien für Mechanik, Eisenbeton- und Brückenbau und habilitierte sich 1916 noch an der Technischen Hochschule in Graz.

Unmittelbar nach Beendigung seiner Studienzeit, 1903, war Leon Assistent am physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Wien, ab 1907 im mechanisch-technischen Laboratorium, der heutigen Versuchsanstalt, und leitete 1910/11 die Abteilung für Metallprüfung. Von 1911 bis 1916 war er Vorstandstellvertreter an der Versuchsanstalt für Bau- und Maschinenmaterial des Technologischen Gewerbe- museums in Wien. Gleichzeitig, von 1913 bis 1918, war er Honorar-dozent für technische Mechanik einschließlich der Konstruktionsübungen für Brückenbau an der Hoch-



schule für Bodenkultur in Wien. Vor seiner 1916 erfolgten Berufung als außerordentlicher Professor für reine Mechanik an die Deutsche Technische Hochschule in Brünn betätigte er sich außerdem bei den k. k. Staatsbahnen im Materialbeschaffungsamte der Nordbahndirektion in Wien. 1918 wurde er als ordentlicher Professor für Technische Mechanik und Mechanische Technologie an die Technische Hochschule Graz berufen, wo er eine mechanisch-technische Versuchsanstalt gründete, die 1921 autorisiert und mit Hilfe der Steirischen Industrie und den Mitteln der Völkerbundanleihe zu einem modernen Institut ausgebaut, 1944 aber leider durch Bombentreffer fast vollständig zerstört wurde.

Während der Jahre 1934 bis 1946 im zeitlichen Ruhestand, veröffentlichte er nahezu 2000 Berichte über Arbeiten im Sinne der Dokumentation. Dann folgte er der Berufung als ordentlicher Professor an die Technische Hochschule Wien.

Neben zahlreichen Ehrungen erhielt Leon auf Grund seiner wissenschaftlichen Arbeiten 1906 das Lieleggsche Reisestipendium und war 1908/9 Inhaber der Ghega-Stiftung. 1948 wählte ihn der Internationale Verband der Prüf- und Forschungsanstalten für Baustoffe und Baukonstruktionen zum Delegierten Österreichs.

In den nahezu fünfzig Jahren seiner Hochschultätigkeit erschien eine große Zahl wissenschaftlicher Arbeiten, allein 48 Abhandlungen auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie, unter anderem über die Berechnung von Wärmespannungen in Hohlzylindern und Hohlkugeln sowie in Schornsteinen. Mehrere Aufsätze behandeln die für den Turbinenbau wichtigen Fragen der Spannungen und Formänderungen in rotierenden Körpern, vor allem Körper gleicher Festigkeit. Es ist das große Verdienst Leons, die praktisch wichtigen Fälle der für die Technik bedeutsamen Kerbwirkung in einer Reihe oft sehr umfangreicher Arbeiten teils exakt, teils näherungsweise behandelt zu haben. Seine Forschungsarbeiten über den Gebirgsdruck in Tunnels haben in der Fachwelt großen Widerhall gefunden, besonders in Verbindung mit dem seinerzeitigen Bau des Simplontunnels. Eng im Zusammenhang mit der Frage der Spannungsstörungen stehen seine Studien über die Spannungsverteilung in Verbundkörpern und eingebetteten Rohren.

Leon erweiterte die Mohrsche Anstrengungstheorie durch Annahme einer gekrümmten Hüllinie, wodurch sich Schub- und Trennbruch erklären lassen. In acht Arbeiten wird die Anwendung der Mohrschen Theorie mit Hüllparabel gezeigt, die dadurch wesentlich an praktischer Bedeutung gewonnen hat.

Auf dem Gebiete der Materialprüfung verdanken wir ihm mehr als siebenzig Arbeiten, die sich mit der Prüfung von Metallen, Holz, natürlichen und künstlichen Gesteinen befassen.

Die Hochschule verliert einen hervorragenden Lehrer und unermüdlichen, erfolgreichen Forscher, die Wirtschaft einen jederzeit bereiten, gewissenhaften Berater. *Opera eius non peribunt.*

*F. Magyar, Wien.*

## Buchbesprechungen.

**Röntgen- und Radiumphysik für Mediziner.** Von *R. Glocker*. Mit 168 Textabb., VIII, 275 S. Stuttgart: G. Thieme. 1949. Geb. DM 19.80.

Der Autor des vorliegenden Buches, Dr. Richard Glocker, Professor für Röntgentechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart, ist für jeden einigermaßen mit Röntgenphysik und Röntgentechnik vertrauten Leser ein Begriff. Nebst zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten und Sonderveröffentlichungen ist Glockers Buch „Materialprüfung mit Röntgenstrahlen“ allgemein bekannt und insbesondere als erste Auflage so bahnbrechend gewesen, daß man nunmehr einer Röntgen- und Radiumphysik für Mediziner aus der Feder desselben Autors mit größtem Interesse entgegen sieht. In dem vorliegenden Buch versucht Glocker, unter sparsamster Verwendung von Mathematik im Text in einer leichtfaßlichen, erzählenden Weise den Nichtphysiker in die verschiedenen Kapitel der modernen Atomphysik einzuführen. Auch die Erzeugung sowie



die Eigenschaften und die Wirkung der Röntgenstrahlen, und zwar von den Grenzstrahlen bis zu den 100-Millionen-Volt-Röntgenstrahlen werden in dem Buch in elementarer Form dargestellt. Die folgenden Kapitel über Dosierung von Röntgen- und Radiumstrahlen sowie über Strahlenschutz sind für den Mediziner genau so wichtig wie die ebenfalls beschriebenen Probleme der Röntgendiagnostik, der Tiefentherapie und der Primärwirkung ionisierender Strahlen auf die Zelle. Ein Anhang ist der Durchführung einiger praktisch wichtiger Berechnungen gewidmet.

Der schon erwähnte, unter fast völligem Verzicht auf mathematische Ausdruckweise aufgebaute Versuch einer Darstellung des beschriebenen Gebietes ist an sich schwierig. Es bleibt daher abzuwarten, ob die dem Fachmann flüssig und leicht faßlich erscheinende Darstellung auch geeignet ist, dem Nichtphysiker die geschilderten Probleme verständlich zu machen.

Wenn auch bei einer solchen Darstellung gewisse Konzessionen an die Exaktheit zugunsten des leichteren Verständnisses gemacht werden müssen, so dürften gerade in einem für Nichtphysiker bestimmten Buch Unrichtigkeiten, wie sie etwa die in der Fußnote auf Seite 29 beschriebene Kanalstrahlenröhre oder die auf Seite 80 als Witka-Schaltung zur Spannungsverdreifung bezeichnete Greinacher-Schaltung zur Spannungsverdoppelung sind, ohne Druckfehlerberichtigung nicht vorkommen. Es ist zu hoffen, daß die in dem Buch enthaltenen Ungenauigkeiten in einer Neuauflage richtiggestellt werden und daß in derselben auch das Literaturverzeichnis vervollständigt werde. Das Buch, das eine Lücke im Schrifttum ausfüllt, wird dann sicher vielen Medizinern und Studierenden gute Dienste leisten, da es neben den physikalischen Tatsachen auch die Wirkung der verschiedenen Strahlenarten auf biologische Objekte beinhaltet.

F. Regler, Wien.

**Wave Theory of Aberrations.** Von H. H. Hopkins. (Monographs on the Physics and Chemistry of Materials. Herausgegeben von W. Jackson, H. Fröhlich und N. F. Mott.) Mit 64 Textabb., VIII, 169 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1950. Geb. 15 s. net.

Trotz seines Titels ist das Buch der Darstellung der geometrischen Optik gewidmet. Aber man kann die geometrischen Aberrationen eines optischen Systems nach zwei verschiedenen Gesichtspunkten behandeln: 1. Man betrachtet die Abweichungen der Wellenflächen von einer idealen Kugelfläche oder man untersucht 2. die mangelnde Strahlenvereinigung in einem Punkt. Das vorliegende Buch gibt eine konsequente Darstellung der Bildfehlertheorie vom ersterwähnten Standpunkt. Dem Verfasser, der sich hierbei vielfach auf eigene Arbeiten stützen kann, ist es hierbei gelungen, durch die Tat zu beweisen, daß auf diese Weise eine gedrängte und dabei durchsichtige Darstellung der hierhergehörenden Tatsachen möglich ist, die vor allem auch für den praktischen Optiker seinen Wert hat. Man muß sich nur daran gewöhnen, von den Strahlensystemen zu ihren Orthogonalflächen überzugehen. Diese „Übersetzung“ wird für die meisten bekannten Resultate der geometrischen „Strahlenoptik“ durchgeführt. Ein Vorteil der vom Verfasser verfolgten Methode liegt sicher auch darin, daß sie den Zugang zur eigentlichen wellentheoretischen Behandlung der Abbildung erleichtert. Auf diese Fragen der wellenmäßigen Intensitätsberechnung, die man nach dem Buchtitel eigentlich erwarten würde, kann allerdings nicht eingegangen werden. Aber der reiche Inhalt, der neben den allgemeinen Berechnungen der Aberrationen auch ins einzelne gehende Rechenschemata für die praktische Durchrechnung umfaßt und die klare Darstellung bürgen dafür, daß jeder an der geometrischen Optik Interessierte mit großem Nutzen das vorliegende Buch verwenden wird.

W. Glaser, Wien.

**Dynamik selbsttätiger Regelungen.** Von R. C. Oldenbourg und H. Sartorius. Zweite Auflage. 1. Band: Allgemeine und mathematische Grundlagen. — Stetige und unstetige Regelungen. — Nichtlinearitäten. Mit 112 Textabb. und einer Tafel, 258 S. München: R. Oldenbourg. 1951. Geb. DM 26.—.

Anschließend an den vorliegenden ersten Band ist ein zweiter Band über die Theorie der optimalen Abstimmung in Vorbereitung.

In richtiger Einschätzung der großen Bedeutung, die der modernen Regeltechnik heute auf nahezu allen Gebieten der angewandten Naturwissenschaften zukommt, wird eine dem neuesten Stand entsprechende, umfassende Darstellung der Grundlagen gegeben. Die Verfasser heben das Gemeinsame der Probleme hervor, ohne auf Einzelheiten spezieller Ausführungen näher einzugehen. Wie glücklich diese Auswahl des Stoffes war, ergibt sich aus der Tatsache, daß die 1944 erschienene erste Auflage nicht nur rasch vergriffen war, sondern bereits 1948 von der „American Society of Mechanical Engineers“ nachgedruckt wurde.

Zur mathematischen Behandlung der Differentialgleichungen der linearen Übertragungssysteme benützen die Verfasser die Laplace-Transformation, das Duhamelsche Integral, die Hurwitzschen und Nyquistschen Stabilitätskriterien und noch viele funktionentheoretische Methoden, die dem Techniker im allgemeinen nicht geläufig sind. Man kann nur hoffen, daß es gelungen ist, auch mathematisch weniger geschulte Leser davon zu überzeugen, wie lohnend



das Studium übersichtlicher Methoden für die Weiterentwicklung auch in jenen Fällen ist, die einer elementaren, dafür aber langwierigen, weniger aufschlußreichen Rechnung zugänglich sind. Jedenfalls aber bemühen sich die Verfasser, die benötigten Sätze und Regeln sorgfältig herauszuarbeiten und sie betonen auch, daß verwickeltere Unterfunktionen durch Partialbruchzerlegung oder Reihenentwicklung auf einfache Bildfunktionen zurückgeführt werden können. Auch die direkte Auswertung des Umkehrintegrals, die häufig am kürzesten Weg zum Ziel führt, ist bei den vorkommenden Bildfunktionen immer möglich. Eine bei der Anwendung der Übergangsfunktion auftretende Volterrasche Integralgleichung wird in eleganter Weise mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst.

Hervorgehoben ist der zur Beurteilung stabiler Ausgleichsvorgänge auch bei Problemen höherer Ordnung wichtige Begriff der „Regelgüte“ sowie die Kennzeichnung technischer Regelstrecken. Beide Definitionen können auf bisher ungelöste Regelprobleme befruchtenden Einfluß gewinnen.

Ein kurzer Abschnitt ist der Behandlung von Nichtlinearitäten (Reibung und Lose) gewidmet.

Im Zusammenhang mit den Differenzengleichungen der ausschlagabhängigen Schrittregulierung bringen die Verfasser in gedrängter Form die wesentlichsten Grundbegriffe der Differenzenrechnung, deren Bedeutung für die Praxis derzeit noch viel zu wenig erkannt wurde.

Besonders verdienstvoll erscheint dem Referenten das mutige Unternehmen der Verfasser, den praktisch ausübenden Technikern den Weg zu ihrer mathematischen Vervollkommnung zu zeigen, auf die sie schon im Hinblick auf anzustrebende Fortschritte nicht verzichten können. Sicher ist aber, daß das Buch viele Freunde in den Kreisen der Theoretiker und nicht zuletzt auch unter den der Theorie aufgeschlossenen Praktikern finden wird. *F. Magyar, Wien.*

**Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik.** Von *W. Schmeidler*. Mit 3 Textabb., VIII, 155 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1949.

Das nicht zu umfangreiche Buch umfaßt neun Vorträge, die der Verfasser im Jahre 1942 im Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin für Ingenieure gehalten hat. Dem Wunsche nach Veröffentlichung nachkommend, hat der Autor diese Vorlesungen in erweiterter Form und durch Literaturverzeichnis, Namen- und Sachregister ergänzt herausgegeben. Zeigt schon allein die Notwendigkeit solcher Vorträge ihre Wichtigkeit für theoretisch aufgeschlossener Ingenieure nahezu aller Fachrichtungen, so überzeugen die sehr glücklich gewählten praktischen Anwendungen auf freie Schwingungen elektrischer Netze bei verschwindendem bzw. kleinem Ohmschen Widerstand, erzwungene Schwingungen, Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängungspunkt, Drehschwingungen an Kurbelwellen von Verbrennungsmotoren den Leser um so mehr, daß das Studium moderner umfassender mathematischer Disziplinen nicht nur für den Fortschritt unentbehrlich ist, sondern auch das Gedächtnis durch analoge Behandlung gleichartiger Probleme ganz wesentlich entlastet. Heute werden auch die meisten ausübenden Techniker kaum mehr mit dem gesunden Menschenverstand und der Anschauung allein zurechtkommen, und das unbedingte Festhalten an elementaren Vorstellungen wird im allgemeinen durch Unübersichtlichkeit und zeitraubende Umständlichkeit erkauft, die das eigentliche Problem in den Hintergrund drängen.

Natürlich ist an einschlägiger Literatur kein Mangel. Aber der mathematisch weniger Geschulte, der meistens auch weniger Zeit aufbringen kann, bedarf der gediegenen Führung eines erstklassigen Fachgelehrten, der das Wesentliche in konzentrierter Form herauszuarbeiten versteht. Und das gerade gelingt dem Verfasser in so vollendeter Weise, daß auch mit der Materie bereits vertraute Leser noch durch bisher unbeachtete Zusammenhänge überrascht werden, die das Gemeinsame und Unterschiedliche von Determinanten, Matrizen und Tensoren kennzeichnen. Besondere Sorgfalt verwendet der Verfasser auf Differentialgleichungssysteme, Stabilitätsprobleme und deren Kriterien, wobei die schon vor Hurwitz im Jahre 1850 von Hermite angegebene Methode „gebührend zur Geltung gebracht wird“.

Der folgerichtige Aufbau des Stoffes, die exakte, wissenschaftlich schöne Ausdrucksweise des Verfassers und nicht zuletzt die kurze gedrängte Form der Darstellung erleichtern das Studium im höchsten Maße und machen das Buch nach gründlicher Durcharbeitung zu einem ausgezeichneten Nachschlagwerk. Jedem Vortrag sind Übungsbeispiele angeschlossen, die eine Vertiefung in das Gebotene ermöglichen. *F. Magyar, Wien.*

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.



## Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften  
Herausgegeben von **K. W. Fritz Kohlrausch**, Graz, und **Hans Thirring**, Wien  
Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

*Soeben erschien:*

### 4. Band, 4. (Schluß-)Heft

(Ausgegeben im Mai 1951)

Mit 70 Textabbildungen. 192 Seiten. S 122.—, DM 26.80, \$ 6.40, sfr. 27.50

*Inhalt:* **Thirring, W.** Bericht über die neuen Entdeckungen im Wasserstoffspektrum. — **Bergmann, O.** Zum Kernphotoeffekt an Beryllium. — **Wieninger, L.** Über die Reichweite von Polonium-Strahlen in einigen Alkalihalogenidkristallen (NaCl, KCl, KBr und KJ). — **Lihl, F.** Ferromagnetische Eigenschaften halboxydischer Eisen- und Eisen-Kobalt-Pulver. — **Urban, P.** und **F. Schwarzl.** Die Theorien der Teilchen mit höherem Spin. — **König, H. W.** Materielle und quantenhafte Eigenschaften elektromagnetischer Wellenfelder. — **Herzog, R. F. K.** Neue Erkenntnisse über die elektronenoptischen Eigenschaften magnetischer Ablenkfelder. — **Roesler, F. C.** Überlegungen zur Ehrenhaftschen Magneto-Photophorese. — **Rieder, W., H. Müller** und **E. Broda.** Zum Szilard-Chalmers-Effekt mit schnellen Neutronen. — **Ehrenhaft, F.** Über die Photophorese, die wahre magnetische Ladung und die schraubenförmige Bewegung der Materie in Feldern. Erster Teil. — **Ehrenhaft, F.** und **F. Stockinger.** Der Magnet als Diakriter von Säure und Base. — **Smekal, A.** Bericht über die Österreichische Physikertagung in Graz und die Gründung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft.

---

## Tschemmaks Mineralogische und Petrographische Mitteilungen

Herausgegeben von

**F. Machatschki**, Wien, und **H. Leitmeier**, Wien

Dritte Folge

*Soeben erschien:*

### Band II, Heft 3

(Ausgegeben im Juni 1951)

Mit 38 Textabbildungen. 140 Seiten. S 92.—, DM 25.20, \$ 6.—, sfr. 25.80

*Inhalt:* **Scheminzky, F.** und **W. Grabherr.** Über Uran anreichernde Warzen- und Knöpfchensinter an österreichischen Thermen, insbesondere in Gastein. — **Rüling, J.** und **F. Scheminzky.** Die Alphastrahlung der Gasteiner Warzen- und Knöpfchensinter. — **Hayek, E.** und **H. Wierer.** Über den Arsengehalt von Stollenwässern in der Umgebung Badgasteins. — **Haberlandt, H.** und **A. Schiener.** Die Mineral- und Elementvergesellschaftung des Zentralgneisgebietes von Badgastein (Hohe Tauern). — **Exner, Ch.** Mikroklinporphyroblasten mit helizitischen Einschlußzügen bei Badgastein. — **Siegl, W.** Erzmikroskopische Studie des Glaserzes vom Radhausberg bei Gastein. — **Paulitsch, P.** Zur Häufigkeit der Pyritformen.

---

## Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie

Herausgegeben von

Dozent Dr. **W. Mörikofer**  
Physikalisch-meteorologisches  
Observatorium Davos

und Prof. Dr. **F. Steinhauser**  
Zentralanstalt für Meteorologie  
und Geodynamik Wien

### Serie B: Allgemeine und biologische Klimatologie

*Soeben erschien:*

### Band II, 4. Heft

(Abgeschlossen im April 1951)

Mit 31 Textabbildungen. 96 Seiten. S 60.—, DM 14.80, \$ 3.60, sfr. 15.50

*Inhalt:* **Dirmhirn, Inge.** Untersuchungen der Himmelstrahlung in den Ostalpen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Höhenabhängigkeit. — **Sauberer, F.** Registrierungen der nächtlichen Ausstrahlung. — **Uttinger, H.** Zur Höhenabhängigkeit der Niederschlagsmenge in den Alpen.

---

Zu beziehen durch jede Buchhandlung



*Soeben erschienen:*

## **Einflußfelder elastischer Platten**

Von

**Dipl.-Ing. Prof. Dr. techn. Adolf Pucher**

Graz

52 Tafeln mit VIII, 13 Seiten Text und 10 Textabbildungen. Quer-4°. 1951

Geb. S 120.—, DM 27.70, \$ 6.60, sfr. 28.40

So wie man für die Berechnung der Haupttragwerke von Brücken mit Vorteil Einflußlinien verwendet, ermöglichen bei den elastischen Platten die Einflußfelder die einfachste und genaueste Methode zur Berechnung der Schnittkräfte. Während jedoch die Ermittlung der Einflußlinien für die Träger im allgemeinen von jedem geübten Statiker durchgeführt werden kann, ist die Ermittlung der Einflußfelder der Platten eine mühselige Arbeit und erfordert eingehendste Kenntnisse der Elastizitätstheorie. Das Bedürfnis nach einer Sammlung fertiger Einflußfelder war daher groß. Die mit dem Werk Puchers nunmehr vorliegenden Einflußfelder können ohne jegliche Vorkenntnisse an Hand der Erläuterungen verwendet werden, da bei deren Auswertung mit einfachsten Berechnungen eine hohe Genauigkeit erreichbar ist und hierzu weder Kenntnisse der höheren Mathematik noch der Elastizitätstheorie vorausgesetzt werden.

---

*Soeben erschienen:*

## **Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre**

Eine Einführung des rationalisierten Giorgischen Maßsystems

Von

**Dipl.-Ing. P. Cornelius**

Mitarbeiter des Forschungslaboratoriums der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Niederlande

Mit 11 Textabbildungen. VIII, 89 Seiten. 1951

S 48.—, DM 10.—, \$ 2.40, sfr. 10.40

Das von Giorgi vorgeschlagene und 1935 von der International Electrical Commission angenommene MKS-System stellt in seiner rationalisierten Form einen gewissen Abschluß der Bemühungen dar, ein elektrisches Maßsystem zu schaffen, das ein Maximum an Vorteilen in sich vereinigt. Das vorliegende Buch führt den Leser in leichtfaßlicher Form in die Gedankengänge dieses Systems ein.

---

*Soeben erschienen:*

## **Elektrizität**

Eine gemeinverständliche Einführung in die Elektrophysik  
und deren technische Anwendungen

Von

**Sir Lawrence Bragg**

M. A., Sc. D., M. Sc., F. R. S.

Nobelpreisträger, Cavendish Professor der Experimentalphysik an der Universität Cambridge

Autorisierte deutsche Ausgabe von **Wilhelm Gauster-Filek**

Mit 138 Abbildungen im Text und auf Tafeln. XIV, 273 Seiten. 1951

S 48.—, DM 12.—, \$ 3.—, sfr. 13.—

In fesselnder Art, leicht verständlich und doch allen wissenschaftlichen Anforderungen gerecht werdend, gibt der bekannte Nobelpreisträger Sir Lawrence Bragg eine Einführung in unser heutiges Wissen von der Elektrizität und zeigt den Weg zum Verständnis ihrer wichtigsten technischen Anwendungen. Das Buch wendet sich vor allem an die Jugend und ihre Lehrer, aber auch der Techniker wird es mit Vergnügen lesen.

---

**Zu beziehen durch jede Buchhandlung**

Printed in Austria